

"GENERATIONSABHÄNGIGE VERZWEIGUNGSPROZESSE
UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DES AUSSTERBEVERHALTENS
BEI BELLMAN-HARRIS PROZESSEN MIT EXPONENTIELLEN LEBENSDAUERN"

Lutz Edler

Mainz 1976

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554418_0010

"GENERATIONSABHÄNGIGE VERZWEIGUNGSPROZESSE
UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DES AUSSTERBEVERHALTENS
BEI BELLMAN-HARRIS PROZESSEN MIT EXPONENTIELLEN LEBENSDAUERN"

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Lutz Edler
geb. in Ziegelbronn

Mainz 1976



Dekan : Prof. Dr. H. Rüßmann

1. Berichterstatter : Prof. Dr. Wolfgang J. Bühler

2. Berichterstatter : Prof. Dr. Niels Keiding

Tag der mündlichen Prüfung : 26. Juli 1976

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Bezeichnungen und Abkürzungen	iv
Einleitung	1
Teil I	
Ein allgemeiner altersabhängiger Verzweigungsprozess mit generationsabhängigen Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen	17
§ 1 Definition des allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozesses mit generationsabhängigen Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen	17
1.1 Der Wahrscheinlichkeitsraum	17
1.2 Zufällige Funktionen	20
§ 2 Regularität	24
§ 3 Der eingebettete Galton-Watson Prozess der Generationen und die Aussterbewahrscheinlichkeit	29
§ 4 Systeme von Integralgleichungen für wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen und Momente der Populationsgröße	33
4.1 Die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen	34
4.2 Die Erwartungswerte	41
4.3 Die zweiten Momente	44
§ 5 Grenzwertsätze im superkritischen Fall	49
5.1 Asymptotisches Verhalten der Momente falls $\prod_i$ konvergiert	54

5.2	Asymptotisches Verhalten der Momente falls Γ_1 divergiert	63
5.3	Konvergenz im quadratischen Mittel der normierten Populationsgröße	69
§ 6	Anwendungen und Beispiele	74
6.1	Variabilität in den ersten Generationen	74
6.2	Der generationsabhängige Bellman-Harris Prozess	81
6.3	Generationsabhängige Poissonsche Verzweigungsprozesse	91
Teil II		
	Verhalten der Populationsgenerationen	94
§ 7	Die Größe der Populationsgenerationen	94
7.1	Generationsfragen bei Verzweigungsprozessen	94
7.2	Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen und Momente	99
§ 8	Das Aussterben der Populationsgenerationen bei Bellman- Harris Prozessen mit exponentiellen Lebensdauern	107
8.1	Der generationsabhängige Bellman-Harris Prozess	107
8.2	Der Markovsche Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit	117
8.3	Beweise für die Sätze 8.1 und 8.2	128
§ 9	Konvergenz der Populationsgenerationsgröße in einer Folge von generationsabhängigen Bellman-Harris Prozessen mit exponentiellen Lebensdauern	151
Anhang		158
Literaturverzeichnis		162
Zusammenfassung		167

BEZEICHNUNGEN UND ABKÜRZUNGEN

$\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0$ = $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}$ = $(-\infty, \infty)$ = reelle Zahlen

$\mathbb{C}$ = komplexe Zahlen

$[x, y]$, $[x, y)$, $(x, y]$, (x, y) = abgeschlossenes,
rechts halboffenes, links halboffenes, offenes
Intervall in $\mathbb{R}$

$\mathbb{1}$ = Symbol für die Indikator funktion

$\mathcal{J}(x)$ = $\mathbb{1}_{(0, \infty)}$ = 1 für $x > 0$ und 0 für $x \leq 0$

E = Symbol für den Erwartungswert

Var = Symbol für die Varianz

$*$ = Symbol für die Faltung

ZV = Zufallsvariable

W = Wahrscheinlichkeit

WR = Wahrscheinlichkeitsraum

WV = Wahrscheinlichkeitsverteilung

WEF = Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$WE\text{-Funktional}$ = Wahrscheinlichkeitserzeugendes Funktional

VF = Verteilungsfunktion

f.s. = fast sicher oder mit Wahrscheinlichkeit 1

o = "kleines" Landausches Symbol: $a(t)$, $b(t)$ reelle
Funktionen, $b(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$a(t) = o(b(t)) \text{ für } t \rightarrow \infty \iff \frac{a(t)}{b(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$\nearrow$ = monoton wachsend = monoton nicht fallend

$\searrow$ = monoton fallend

$\#$ = Kardinalzahl oder Anzahlfunktion

$\sim$ = asymptotisch äquivalent

$\xrightarrow{L_2}$ = L_2 -Konvergenz oder Konvergenz im quadratischen Mittel

$\square$ = Ende eines Beweises

$$\sum_n^m = 0 \quad , \quad \prod_n^m = 1 \quad \text{für } m < n$$

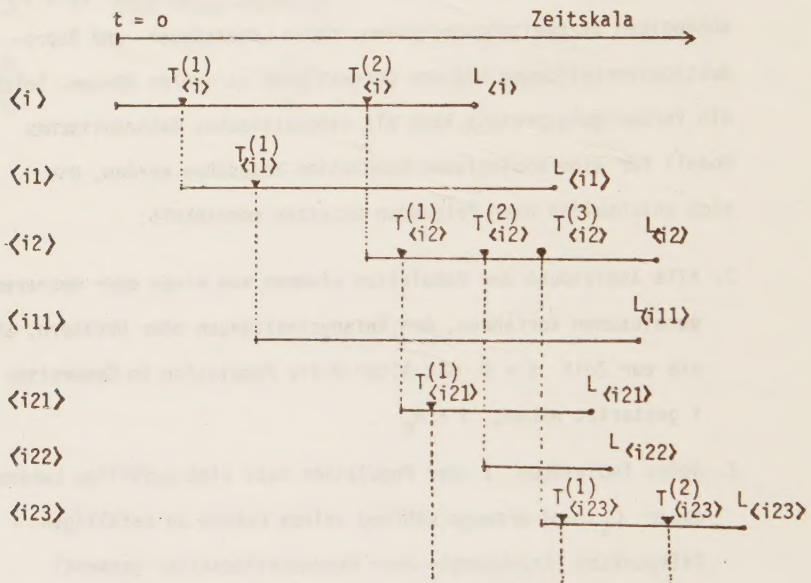
Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozessen, deren Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen mit den Generationen variieren können. Solch ein Verzweigungsprozess kann als stochastisches mathematisches Modell für eine biologische Population angesehen werden, die sich anschaulich nach folgenden Gesetzen entwickelt:

1. Alle Individuen der Population stammen von einem oder mehreren gemeinsamen Vorfahren, den Anfangsindividuen oder Urvätern, ab, die zur Zeit $t = 0$ mit Alter 0 die Population in Generation i gestartet haben; $i \in N_0$.
2. Jedes Individuum I der Population habe eine zufällige Lebensdauer L_I und erzeuge während seines Lebens zu zufälligen Zeitpunkten (Erzeugungs- oder Reproduktionsalter genannt) $T_I^{(1)}, T_I^{(2)}, \dots, T_I^{(N_I)}$ je einen Nachkommen. Dabei sei N_I die gesamte Anzahl von Nachkommen, die Individuum I erzeugt; $0 \leq N_I \leq \infty$; $T_I^{(1)} \leq T_I^{(2)} \leq \dots \leq T_I^{(N_I)} \leq L_I$, wenn $N_I > 0$ und es treten keine Reproduktionsalter auf, wenn $N_I = 0$ ist.
3. Die Nachkommen eines Individuums der n -ten Generation gehören zur $n+1$ -ten Generation. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lebensdauer- und Reproduktionsalter ist für Individuen innerhalb derselben Generation gleich, kann aber von Generation zu Generation verschieden sein.

4. Alle Individuen der Population leben und erzeugen ihre Nachkommen unabhängig voneinander und von ihrer oder anderer Vorgeschichte (Verzweigungseigenschaft) .

Eine mögliche Realisierung einer solchen Bevölkerungsentwicklung beschreibt Figur 1 .



Figur 1 : Die Population beginne mit einem Urvater $\langle i \rangle$ in der i -ten Generation. Er erzeuge mit Alter $T_{\langle i \rangle}^{(1)}$ den Nachkommen $\langle i1 \rangle$ und mit Alter $T_{\langle i \rangle}^{(2)}$ den Nachkommen $\langle i2 \rangle$ und sterbe mit Alter $L_{\langle i \rangle}$. $N_{\langle i \rangle} = 2$. $\langle i1 \rangle$ erzeuge mit Alter $T_{\langle i1 \rangle}^{(1)}$ den Nachkommen $\langle i11 \rangle$ und sterbe mit Alter $L_{\langle i1 \rangle}$, $N_{\langle i1 \rangle} = 1$, u.s.w.. $\langle \dots \rangle$ beinhaltet die Kennziffer des entsprechenden Individuums und gibt gleichzeitig an, zu welcher Generation das Individuum gehört.

Wegen der Verzweigungseigenschaft kann man o.B.d.A. voraussetzen, daß die Population mit genau einem Urvater beginnt, denn im

anderen Fall hat man einfach mehrere unabhängig nebeneinander laufende Populationen.

Sei $Z_i(t)$ die Anzahl der Individuen, die zur Zeit t in der Population leben und von einem Urvater aus der i -ten Generation abstammen. Den stochastischen Prozess $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ nennen wir allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozess mit generationsabhängigen Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen. Die Verteilungen dieses Prozesses sind festgelegt, wenn die gemeinsamen WV von $(T_I^{(1)}, \dots, T_I^{(N_I)}; L_I)$ für alle Individuen I aus der Population gegeben sind. Wegen 3. genügt es, wenn die gemeinsamen WV von $(T_{\langle k \rangle}^{(1)}, \dots, T_{\langle k \rangle}^{(N_k)}; L_{\langle k \rangle})$ für $k \geq i$ bekannt sind. Wir denken uns diese Verteilungen für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch die gemeinsamen Verteilungen eines stochastischen Zählprozesses $\{K_{\langle k \rangle}(t), t \geq 0\}$ und der Lebensdauer $L_{\langle k \rangle}$, die im allgemeinen voneinander abhängen dürfen; dabei kann man $K_{\langle k \rangle}(t)$ als die Anzahl der denkbaren Nachkommen interpretieren, die $\langle k \rangle$ bis einschließlich seinem Alter t erzeugt. Die Anzahl $N_{\langle k \rangle}(t)$ der tatsächlichen Nachkommen, die $\langle k \rangle$ bis zur Zeit t erzeugt, ist dann der zur Zeit $L_{\langle k \rangle}$ gestoppte Zählprozess $\{K_{\langle k \rangle}(t)\}$:

$$N_{\langle k \rangle}(t) := \begin{cases} K_{\langle k \rangle}(t) & \text{für } t \leq L_{\langle k \rangle} \\ K_{\langle k \rangle}(L_{\langle k \rangle}) & \text{für } t > L_{\langle k \rangle} \end{cases}$$

$N_{\langle k \rangle} := N_{\langle k \rangle}(\infty)$ ist dann die Anzahl der Nachkommen von $\langle k \rangle$; der Erwartungswert $E N_{\langle k \rangle}(t)$ wird mit $F_k(t)$ bezeichnet und heißt auch Reproduktionsfunktion eines Individuums der k -ten Generation.

Verzichtet man auf die Forderung der Generationsabhängigkeit der Verteilungen in 3. und setzt man $i = 0$, erhält man einen allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozess $\{Z(t), t \geq 0\}$, wie er

von Crump-Mode [8] und unabhängig davon auch von Jagers [17] zum ersten Mal untersucht wurde. Aus diesem Grund nennen wir diesen *
Verzweigungsprozess im folgenden auch Crump-Mode-Jagers Prozess.
Man hat ihn eingeführt, da er wegen der Möglichkeit von Geburten während des Lebens eines Individuums ein realistischeres Modell für natürliche Populationen ist, als es die bis dahin behandelten Galton-Watson Prozesse, Markovschen- und altersabhängigen Verzweigungsprozesse waren. Man erhält eine anschauliche Beschreibung des altersabhängigen Verzweigungsprozesses oder Bellman-Harris Prozesses, wenn man im obigen Modell $T_I^{(1)} = T_I^{(2)} = \dots = T_I^{(N_I)} = L_I$

für alle I fordert, die Generationsabhängigkeit in 3. wegläßt und $i = 0$ setzt. Verlangt man zusätzlich, daß die Lebensdauer aller Individuen exponential verteilt ist, hat man einen Markovschen Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit. Den Galton-Watson Prozess erhält man aus dem obigen Modell für $i = 0$, $T_I^{(1)} = \dots = T_I^{(N_I)} = L_I = 1$ für alle Individuen I und wenn man die Generationsabhängigkeit wegläßt.

Auf die vielen möglichen Verallgemeinerungen und Erweiterungen dieser oben genannten Verzweigungsprozesse wollen wir hier ebenso wenig eingehen wie auf die möglichen Anwendungen von Verzweigungsprozessen als Modelle für Populationen in der Demographie und der Biologie oder für Vorgänge in Physik, Chemie oder Technik. Wir verweisen hier auf die Darstellungen bei Jagers [19] Sewastjanow [33] Athreya-Ney [2], Mode [28], und insbesondere Harris [16]. Interessante historische Aspekte findet man bei Jagers [19].

* Diesen in der Literatur oft auch als Crump-Mode Prozess bezeichneten Verzweigungsprozess möchte ich hier einer Anregung von Joel Cohen folgend Crump-Mode-Jagers Prozess nennen. Erwähnen sollte man auch Ryan [30], der unabhängig von den genannten einen Beitrag zu diesem Verzweigungsprozess geliefert hat.

Klassische Fragestellungen bei den obengenannten generationsunabhängigen Verzweigungsprozessen sind : Wann stirbt eine Population mit Wahrscheinlichkeit 1 aus und wann hat sie eine positive Chance zu überleben? Wie stirbt sie aus und wie verhält sich die Populationsgröße $Z(t)$, falls sie nicht ausstirbt? Stabilisiert sich die Anzahl der Individuen $Z(t)$ mit der Zeit, fluktuiert sie unbestimmt, explodiert sie in endlicher Zeit oder wächst sie für $t \rightarrow \infty$ über alle Grenzen und wie sieht dann die Wachstumsrate aus?

Daneben untersuchte man auch die Anzahl $Z^{(k)}(t)$ der Individuen, die zur Zeit t in der k -ten Generation leben, wenn die Population mit einem Urvater aus der 0-ten Generation begonnen hat. Für generationsabhängige Verzweigungsprozesse bezeichnen wir diese Größe der Generationen mit $Z_i^{(k)}(t)$, falls der Urvater in der i -ten Generation war (siehe Definition 3.1 und 7.1). Im superkritischen Fall, wenn die mittlere Anzahl von Nachkommen pro Individuum größer 1 ist, haben für die oben genannten generationsunabhängigen Verzweigungsprozesse Jagers [19], 8.5 , Samuels [31] und Bühler [6] und [5] im wesentlichen die beiden folgenden Fragen untersucht: Wie verteilen sich die Generationen in der Population zu einem bestimmten Zeitpunkt ? Wie ist die zeitliche Verteilung einer bestimmten Generation während der Entwicklung der Population ? Bühler [6] und [7] hat zwei weitere Fragen zum Verhalten der Generationen formuliert: Welche Verteilung hat der Zeitpunkt der Geburt des ersten Individuums der k -ten Generation $U^{(k)}$? Welche Verteilung hat der Zeitpunkt des Todes des letzten Individuums der k -ten Generation $V^{(k)}$? Er konnte

beim generationsunabhängigen Bellman-Harris Prozess mit $0 < m := E N$, $G(0) = 0$ und $G'(0) = 1$ zeigen, daß bis auf eine Zeittransformation eine Generation bei einer großen Anzahl von Urvätern sich nach einem zusammengesetzten Poisson-Prozess entwickelt und daß für $t \rightarrow 0$

$$P(U^{(k)} \leq t) = (1-h(0))^m \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + o(t^k) \quad \text{gilt,}$$

N sei die Anzahl der Nachkommen eines Individuums, G die VF der Lebensdauer und $h(0) = P(N = 0)$. Für einen Markovschen Verzweigungsprozess, bei welchem die Anzahl der Nachkommen eines Individuums beschränkt ist, erhält Bühler [7] $P(V^{(k)} > t) = \frac{(mt)^k}{k!} e^{-t} + o(t^k e^{-t})$ für $t \rightarrow \infty$.

Der ursprüngliche Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war die Frage nach der Verteilung des Aussterbezeitpunkts $V^{(k)}$ der k -ten Generation eines Markovschen Verzweigungsprozesses ohne Beschränkung der Nachkommensanzahl und nach der Art und Weise, wie diese Generation aus der Population verschwindet. Als zweite Frage ergab sich: Welchen Einfluß hat dabei eine Generationsabhängigkeit der Lebensdauer- und Nachkommensverteilung?

Generationsabhängige Galton-Watson Prozesse wurden von Jagers [18] und [19] und desgleichen von Lindvall [24], Agresti [1] und Keiding-Nielsen [20] unter dem Namen "Galton-Watson Prozesse in variierender Umgebung" behandelt. Jagers [18] zeigt, daß grundsätzlich im Verhalten der Populationsgröße keine neuen Phänomene auftreten. Fildes [14] und [15] untersucht einen Bellman-Harris Prozess mit generationsabhängiger Lebensdauerverteilung. Im superkritischen Fall konnte er Bedingungen angeben, unter welchen nicht mehr wie im klassischen Fall $Z_i(t) / e^{\alpha t}$ sondern $Z_i(t) / t^{\gamma-1} e^{\alpha t}$ mit $\gamma > 1, \alpha > 0$ im quadratischen Mittel für $t \rightarrow \infty$ gegen eine Grenzvariable W_i konvergiert.

Markovsche Verzweigungsprozesse (in kontinuierlicher Zeit) sind Bellman-Harris Prozesse mit exponentieller Lebensdauerverteilung. Folglich hat man den Verzweigungsprozess bei der obigen Frage nach dem Einfluß der Generationsabhängigkeit als Spezialfall mit- beschrieben, wenn man generationsabhängige Bellman-Harris Prozesse behandelt. Im Rahmen dieser Aufgabe ergibt sich die Frage, ob sich die geänderte Normierung $t^{\gamma-1}e^{\alpha t}$, $\gamma \gg 1$, nicht auch allein durch eine Variabilität in der Nachkommensverteilung erreichen läßt. Es zeigt sich, daß sich die Ergebnisse von Fildes [14] und [15] leicht auf einen Bellman-Harris Prozess mit generationsabhängigen Verteilungen übertragen lassen, so daß sich dann die Frage stellt, ob man mit diesen oder ähnlichen Methoden auch den Crump-Mode-Jagers Prozess im generationsabhängigen Fall behandeln kann. Dies hätte den Vorteil einer allgemeinen Darstellung und man hätte gleichzeitig einige interessante generationsabhängige spezielle Crump-Mode-Jagers Prozesse mit untersucht.

Zusammenfassend ergibt sich somit als Aufgabenstellung :

- I Konstruktion und Behandlung eines allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozesses mit generationsabhängigen Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen nach dem klassischen Muster
- II Untersuchung des Aussterbeverhaltens der Populationsgenerationen im generationsabhängigen und im generationsunabhängigen Fall.

Dies ist Gegenstand von Teil I und Teil II der vorliegenden Arbeit.

Es folgt eine Beschreibung der einzelnen Paragraphen mit den wichtigsten Ergebnissen:

Das eingangs beschriebene anschauliche stochastische Modell einer Bevölkerungsentwicklung wird in § 1 exakt durch einen Wahrscheinlichkeitsraum dargestellt, der so konstruiert wird, daß er die Eigenschaften 1.-4. wiedergibt und gleichzeitig so "reichhaltig" ist, daß alle uns interessierenden Populationscharakteristiken, wie z.B. Anzahl der zur Zeit t Lebenden, bis zur Zeit t geborenen oder gestorbenen Individuen einer bestimmten Generation, in diesem WR definiert werden können. Dies leistet eine Konstruktion über die "Familiengeschichten", die sehr ausführlich schon von Harris [16] angegeben und u.a. von Crump-Mode [8] und Mode [28] verallgemeinert wurde und in der wir hier die Generationsabhängigkeit hinzunehmen. Diesen WR zusammen mit der Populationsgröße $Z_i(t)$ nennen wir in Definition 1.3 allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozess mit generationabhängigen Verteilungen und einem Anfangsindividuum aus der i -ten Generation. Er ist bestimmt durch die Folge der gemeinsamen WV von $(L_k; K_k(t), t \geq 0)$ für $k = i, i+1, \dots; L_k = L_{\langle k \rangle}, K_k = K_{\langle k \rangle}$ wie eingangs definiert. Die bekannten Verzweigungsprozesse wie Crump-Mode-Jagers Prozess, Bellman-Harris Prozess und Galton-Watson Prozess werden als Spezialfälle eingeführt. Grundlegend ist die Darstellung

$$(1.2) \quad Z_i(t) = \delta(L_{\langle i \rangle}, t) + \sum_{j=1}^{N_{\langle i \rangle}(t)} Z_{i+1}(t - T_{\langle i \rangle}^{(j)}) .$$

Nach Sewastjanow [33] nennt man einen Verzweigungsprozess regulär, wenn zu allen Zeiten die Populationsgröße mit W 1 endlich ist, wenn also in endlicher Zeit keine Bevölkerungsexplosionen stattfinden. § 2 bringt eine hinreichende Bedingung A für Regularität (Satz 2.1) des Prozesses $\{Z_i(t), t \geq 0\}$. Voraussetzung A

fordert für $t \geq 0$ die Existenz einer gleichmäßigen oberen Schranke $\Delta(t) < \infty$ für alle $E K_k(t)$, die monoton wachsend, rechtsstetig und für die $\Delta(0) < 1$ ist. Dies fassen wir mit der Forderung, daß die Lebensdauern in allen Generationen stetige VF $G_k(t)$ mit $G_k(0) = 0$ und $G_k(\infty) = 1$ haben, als Voraussetzung B zusammen. Eine gleichmäßige endliche Schranke für die $E N_i$ fordert Voraussetzung C.

Eine für den Verzweigungsprozess wichtige Charakteristik ist die in § 3 betrachtete Aussterbewahrscheinlichkeit

$$q_i := P (Z_i(t) = 0 \text{ für ein } t \geq 0) .$$

Ist $\mathcal{Z}_n(i)$ die Größe der n-ten Populationsgeneration bei einem Urvater aus der i-ten Generation (s. Definition 3.1), dann ist q_i gleich der Aussterbewahrscheinlichkeit dieses eingebetteten generationsabhängigen Galton-Watson Prozesses $\{\mathcal{Z}_n(i), n \in \mathbb{N}_0\}$ der Populationsgenerationen und man erhält aus den Ergebnissen von Jagers [19] eine hinreichende Bedingung für fast sicheres Aussterben. Zudem folgt aus Jagers [19], daß der Prozess, wenn er nicht gerade konstant wird, mit W 1 entweder ausstirbt oder über alle Grenzen wächst.

In § 4 betrachten wir die WEF $F_i(s, t) := E s^{Z_i(t)}$, $s \in [0, 1]$, der Populationsgröße und ihre ersten beiden Momente $M_i(t) := E Z_i(t)$ und $M_i(t, \tau) := E Z_i(t) Z_i(t + \tau)$ $t, \tau \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_0$. Beim generationsunabhängigen Bellman-Harris Prozess und beim Crump-Mode-Jagers Prozess genügt die WEF der Populationsgröße einer Integralgleichung und ihre ersten beiden Momente je einer Erneuerungsgleichung, siehe z.B. Harris [16], Doney [11], Crump-Mode [8] und [9]. In unserem generations-

abhängigen Verzweigungsprozess erfüllt die Folge der WEF $\{F_i(s, t) ; i \in \mathbb{N}_0\}$ das System (4.4) von Integralgleichungen und die Folgen $\{M_i(t) ; i \in \mathbb{N}_0\}$ und $\{M_i(t, \tau) ; i \in \mathbb{N}_0\}$ erfüllen je ein System von Erneuerungsgleichungen:

$$(4.6) \quad M_i(t) = 1 - G_i(t) + \int_0^t M_{i+1}(t-u) dF_i(u)$$

$$(4.9) \quad M_i(t, \tau) = f_i(t, \tau) + \int_0^t M_{i+1}(t-u, \tau) dF_i(u)$$

für $i \in \mathbb{N}_0$, $t, \tau \geq 0$ mit einer etwas komplizierten Funktion $f_i(t, \tau)$, die noch von $M_{i+1}(t)$ abhängt.

Die Frage der Existenz von Lösungsfolgen zu diesen Systemen von Integralgleichungen ist geklärt, da in § 1 der WR und die zufälligen Funktionen explizit konstruiert wurden. Das Problem der Eindeutigkeit wird für die WEF in 4.1, für die Erwartungswerte in 4.2 und für die zweiten Momente in 4.3 behandelt. Dabei erhält man z.B. unter der Voraussetzung B für die Erwartungswerte der Populationsgröße die Darstellung:

$$(4.7) \quad M_i(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} F_{i,j-1}^* * (F_j - G_j)(t)$$

wobei $F_{i,i-1}^* = 1$ und $F_{i,i+n}^* = F_i * \dots * F_{i+n}$ für $n, i \in \mathbb{N}_0$

Faltungsprodukte der Reproduktionsfunktionen $F_k(t)$ sind. Ein entsprechendes Ergebnis gilt für die zweiten Momente, wenn außerdem $E K_k(t)^2$ für alle k gleichmäßig durch eine Funktion $\Delta_2(t) < \infty$ für $t \geq 0$ beschränkt ist, für die $\Delta(0) < 1$ gilt. Letzteres wird unsere Voraussetzung D.

Durch konsequentes Ausnutzen und Verfeinern der Methoden von Fildes [14] bestimmen wir in § 5 die Wachstumsrate von $Z_i(t)$ im quadratischen Mittel, wenn alle Reproduktionsverteilungen super-

kritisch sind und gegen eine superkritische Grenz-"Verteilung" konvergieren. Genauer fordern wir Voraussetzung E : $F_i(t)$ konvergiert für $t \in [0, \infty]$ gegen eine nicht normierte VF $F(t)$; $F(t)$ und alle $F_i(t)$ haben positive und stetige Dichten und $F(\infty), F_i(\infty) > 1$ für alle i . Damit kann man wieder einen Malthus-Parameter α der Population definieren:

$$\alpha : \int_0^{\infty} \exp(-\alpha u) dF(u) = 1 \quad (F(\infty) > 1 \Rightarrow \alpha > 0.)$$

$$\text{Mit} \quad c_i := \int_0^{\infty} \exp(-\alpha u) dF_i(u) \quad \text{ist}$$

$$(5.1) \quad \Gamma_i := \prod_{k=i}^{\infty} c_k$$

das geeignete Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit von $F_i \rightarrow F$.

Konvergiert Γ_i und gelten die Voraussetzungen B,C,D,E, und sind die Varianzen der Nachkommensverteilungen gleichmäßig beschränkt, gilt

$$Z_i(t) / e^{\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_2} W_i \quad (\text{Satz 5.6 (a)})$$

und W_i ist eine nichtnegative ZV mit $E W_i = \frac{\Gamma_i}{\alpha \tilde{\mu}} - \gamma_i > 0$ mit

$$\tilde{\mu} := \int_0^t t e^{-\alpha t} dF(t) \quad \text{und}$$

$$\gamma_i := \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \sum_{j=i+1}^{\infty} F_{i,j-1}^* * G_j(t), \quad \text{dessen Existenz}$$

i.a. noch gefordert werden muß. Der Beweis folgt aus dem asymptotischen Verhalten der ersten beiden Momente, Satz 5.1 und Satz 5.2, welches man mit einem allgemeinen Erneuerungssatz von Smith [35] über Folgen von unabhängigen und nicht notwendig identisch verteilten ZV erhält. Dieser Erneuerungssatz wird im Anhang als Theorem 9 mit seinen Voraussetzungen angegeben.

Divergiert $\prod_i$ so, daß $\sum_{j=i+1}^{i+N} \left(\prod_{k=i+1}^j c_k \right) \sim \frac{\beta_{i+1} L(N) N^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}$ für $N \rightarrow \infty$

mit Zahlen $\beta_{i+1} > 0, \gamma > 1$, einer langsam variierenden Funktion L und der Gammafunktion Γ , so gilt unter B,C,D,E und weiteren Voraussetzungen nach Satz 5.6 (b)

$$Z_i(t) / (\gamma t^{\gamma-1} e^{\alpha t}) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_2} W_i$$

und W_i ist eine nichtnegative ZV mit $E W_i = B_i - K_i > 0; B_i, K_i$ entnimmt man 5.2. Dort wird auch das asymptotische Verhalten der ersten beiden Momente mit Hilfe anderer Erneuerungssätze von Smith [36] behandelt. § 5 endet mit einem System von Integralgleichungen (5.26) für die momentenerzeugenden Funktionen der W_i .

In § 6 betrachten wir zunächst in 6.1 als Anwendung von § 5 einen Verzweigungsprozess, bei welchem die Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen nur in den ersten Generationen variieren und der sich danach wie ein Crump-Mode-Jagers Prozess entwickelt. Für $i = 0$ ändert sich dann $E W_0$ um einen Faktor und $\text{Var } W_0$ um einen Faktor und einen additiven Term gegenüber den bekannten Werten von Crump-Mode [9]. In 6.2 behandeln wir als wichtigstes Beispiel den generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess. Dabei vereinfachen sich die Integralgleichungen aus § 4 zu (6.7) - (6.9) für die WEF und die ersten beiden Momente, wie auch die Voraussetzungen B,C,D,E und die Voraussetzungen zu Satz 5.6. Falls $\prod_i$ konvergiert, kann man in Satz 5.6 (a) eine Bedingung dafür angeben, daß die ZV W_i nicht degeneriert ist. Falls $\prod_i$ divergiert, geben wir eine Folge von exponentiell verteilten Lebensdauern und eine Folge von Nachkommensverteilungen an, für die $Z_i(t) / t^\gamma e^{\alpha t}$ mit $\gamma > 0$ im quadratischen Mittel gegen eine ZV konvergiert. Dieses Beispiel verallgemeinert ein Beispiel von Fildes [14] und zeigt, daß

man $\delta > 0$ auch allein durch Variabilität in der Nachkommensverteilung erreichen kann. Dabei "addieren" sich die Variabilitäten der Lebensdauerverteilungen γ_1 und der Nachkommensverteilungen γ_2 zu $\delta = \gamma_1 + \gamma_2$. Aus diesem generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess erhält man die meisten Ergebnisse von Fildes [14] durch Spezialisierung. Als weitere Beispiele werden in 6.3 kurz generationsabhängige Poissonsche Verzweigungsprozesse definiert.

In Teil II der vorliegenden Arbeit wird in § 7 die Größe der Populationsgenerationen unter allgemeinen Gesichtspunkten betrachtet. 7.1 bringt Definitionen und beschreibt die wichtigsten Fragestellungen, die bei Crump-Mode-Jagers Prozessen und Bellman-Harris Prozessen bisher behandelt wurden. In 7.2 leiten wir für die Größe $Z_i^{(k)}(t)$ der k-ten Populationsgeneration bei einem Urvater aus der i-ten Generation wieder Systeme von Integralgleichungen für die WEF und die ersten beiden Momente aus der Darstellung

$$(7.8) \quad Z_i^{(0)}(t) = \delta(L_{ii} - t)$$

$$(7.9) \quad Z_i^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{N_{(i)}^{(n)}(t)} Z_{i+1}^{(n-1)}(t - T_{(i)}^{(j)}) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

für $t \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_0$, ab. Für die Erwartungswerte ergibt sich z. B.

$$(7.13) \quad M_i^{(0)}(t) = 1 - G_i(t)$$

$$(7.14) \quad M_i^{(n)}(t) = \int_0^t M_{i+1}^{(n-1)}(t-u) dF_i(u) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

und daraus folgt sofort

$$(7.15) \quad M_i^{(n)}(t) = (1 - G_{i+n}) * F_{i, i+n-1}^*(t)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \geq 0$. Dies entspricht in gewisser Weise § 4. In einem Exkurs bemerken wir, daß die Anzahl der Individuen in der

n-ten (bzw in den ersten n) Populationsgeneration(en), die zur Zeit t leben (bzw bis zur Zeit t geboren oder gestorben sind) je Systemen von Integralgleichungen für die WEF und die ersten Momente genügen, die man in einem Schema zusammenfassen kann.

In § 8 untersuchen wir bei Bellman-Harris Prozessen mit exponentiellen Lebensdauerverteilungen mit den Parametern $\lambda_k \leq \bar{\lambda} < \infty$ und Nachkommensverteilungen, deren Varianzen gleichmäßig beschränkt sind, $P(V_i^{(k)} > t)$ die W, daß die k-te Populationsgeneration bis zur Zeit t noch nicht ausgestorben ist, wenn der Urvater in Generation i war.

Korollar 8.1 in 8.1 liefert für

$$(+)\quad \lambda_i \gg \lambda_{i+1} \gg \dots \gg \lambda_{i+k} \quad \text{oder auch noch für}$$

$$(++)\quad \lambda_{i+k} = \min \{ \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+k} \} \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

$$P(V_i^{(k)} > t) = D_{i,k} t^{T_{i,k}} \exp(-\lambda_{i+k} t) + o(t^{T_{i,k}} \exp(-\lambda_{i+k} t));$$

$T_{i,k}$ = Anzahl der λ_j , $j = i, i+1, \dots, i+k-1$, die gleich λ_{i+k} sind;

$$D_{i,k} = \left(\prod_{j=i}^{i+k-1} m_j \lambda_j \right) \left(T_{i,k}! \prod_{k=i, \lambda_j \neq \lambda_{i+k}}^{i+k-1} (\lambda_j - \lambda_{i+k}) \right)^{-1}.$$

Die Spezialfälle $\lambda_i > \dots > \lambda_{i+k}$ und $\lambda_i = \dots = \lambda_{i+k}$ werden in Korollar 8.2 und 8.3 besprochen.

Wir erhalten diese Resultate aus einer Darstellung der WEF der $Z_i^{(k)}(t)$ in Satz 8.1, die in 8.3 bewiesen wird. Insbesondere folgt aus dieser Darstellung unter den obigen Voraussetzungen an $\{\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}\}$

$$P(Z_i^{(k)}(t) = 1) = D_{i,k} t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t} + o(t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t})$$

für $t \rightarrow \infty$; und die W, daß zur Zeit t noch mehr als ein Individuum der k-ten Populationsgeneration lebt, geht für $t \rightarrow \infty$ von höherer Ordnung gegen Null. Ist $\lambda_{i+k} > \min \{ \lambda_i, \dots, \lambda_{i+k} \}$ gilt dies

nicht mehr (siehe Bemerkung 8.2 und das einfache Beispiel für $\lambda_i < \lambda_{i+1}$).

Im generationsunabhängigen Fall erhalten wir in 8.2 für den Markovschen Verzweigungsprozess mit Lebendauer-VF $G(t) = 1 - e^{-t}$ und einer Nachkommensverteilung mit endlicher Varianz und Mittelwert m

$$(8.11) \quad P(\langle k \rangle, t) = m^k (k!)^{-1} t^k e^{-t} + o(t^k e^{-t}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Folgerung 8.3 zeigt, daß bei beschränkter Anzahl von Nachkommen zusätzlich aus der Darstellung der WEF von $Z^{(k)}(t)$ folgt: die W, daß genau ein Individuum der k -ten Generation noch lebt, geht von derselben Größenordnung gegen Null wie die W, daß noch dessen ganze Nachkommenschaft lebt.

In § 9 betrachten wir eine Folge von generationsabhängigen Bellman-Harris Prozessen $\{ (N_i^{Z_i}(t), t \geq 0) : N = 1, 2, \dots \}$, deren N -tes Glied der Startbedingung $N_i^{Z_i}(0) = N$ f.s. genügt. Gehen unter den Voraussetzungen von § 8 t und N so gegen ∞ , daß

$$(9.2) \quad N t^{i,k} \exp(-\lambda_{i+k} t) \longrightarrow \nu(i,k) > 0$$

konvergiert die WV von $N_i^{Z_i}(t)$ gegen eine Poisson-Verteilung mit Parameter $D_{i,k} \nu(i,k)$. Durch Betrachtung gemeinsamer WEF in Satz 9.1 folgt außerdem die asymptotische Unabhängigkeit der Abnahmen $N_i^{Z_i}(t) - N_i^{Z_i}(t+\tau)$, $N_i^{Z_i}(t+\tau)$, wenn t und N nach (9.2) gegen ∞ gehen. Spezialfälle werden in Folgerung 9.1 diskutiert.

Zusammenfassend liefert die vorliegende Arbeit ein Modell für einen generationsabhängigen Crump-Mode-Jagers Prozess der die Ergebnisse von Fildes [14] verallgemeinert. Allgemein erhält man noch Systeme von Integralgleichungen für die WEF und Momente der Populationsgröße und der Größe der Populationsgenerationen. Die Auswirkung der Generations-

abhängigkeit wird an zwei Fragestellungen weiter untersucht : In Teil I betrachten wir die Wachstumsrate der Populationsgröße im superkritischen Fall unter einschränkenden Bedingungen, die von der Anwendung von Erneuerungssätzen herrühren. Wir erhalten ein L_2 - Ergebnis. In Teil II betrachten wir das Aussterbeverhalten der Populationsgenerationen bei Bellman-Harris Prozessen mit exponentieller Lebensdauer.

Im Vergleich zu den bekannten Ergebnissen bei nicht generationsabhängigen Verzweigungsprozessen bleiben z.B. neben fast sicheren Resultaten im "superkritischen" Fall noch der "subkritische" und der "kritische" Fall offen. Abgesehen davon, daß diese Klassifikation noch präzisiert werden muß, ist allerdings zu beachten, daß die Generationsabhängigkeit sehr viel Variabilität in die zu festen Zeiten betrachteten Populationsgrößen bringt, so daß weitere Ergebnisse zunächst vielleicht nur in speziellen Fällen erwartet werden können. Letzteres mag auch für die Behandlung der anderen Generationsfragen in 7.1 gelten, die wir hier nicht weiter verfolgen wollen.

- - - - -

Herrn Prof. Dr. Wolfgang J. Bühler möchte ich an dieser Stelle für seine Unterstützung und Anregungen zu dieser Arbeit danken.

- - - - -

Diese Arbeit wurde im Rahmen eines von der VW - Stiftung geförderten Projekts über Biomathematik fertiggestellt.

Teil I

Ein allgemeiner altersabhängiger Verzweigungsprozess mit generationsabhängigen Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen

§ 1 Definition des allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozesses mit generationsabhängigen Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen

1.1 Der Wahrscheinlichkeitsraum

Eine explizite Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsraumes ist aus zweierlei Gründen günstig: Zum einen benötigen wir bei manchen Beweisen eine genauere Kenntnis der Struktur des zu Grunde liegenden WR und zum anderen enthebt uns eine explizite Konstruktion der Notwendigkeit, Existenzsätze für die auftretenden Systeme von Integralgleichungen zu beweisen. Die Grundidee der folgenden Konstruktion findet man schon bei Harris[16], S. 122-127 für den altersabhängigen Verzweigungsprozess. Diese Konstruktion wurde von Crump-Mode [8] für den Crump-Mode-Jagers Prozess verallgemeinert und sie wird hier um die Variabilität pro Generation erweitert.

Sei i eine nichtnegative in diesem Paragraphen feste ganze Zahl. Beginnt die Population zur Zeit $t = 0$ mit einem Individuum vom Alter 0 aus der i -ten Generation, so bezeichnen wir diesen Urvater der Population mit $\langle i \rangle$. Ein Individuum I aus der $i+n$ -ten Generation wird dann durch ein $n+1$ -Tupel $\langle i | i_1 \dots i_n \rangle$ mit $i_r \in \mathbb{N}$ für $r = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, beschrieben. Dabei interpretiert

man die Folge $i_1 \dots i_n$ als Abstammungslinie des Individuums I von $\langle i \rangle$: $\langle i | i_1 \dots i_n \rangle$ ist das i_n -te Kind des i_{n-1} -ten Kindes des ... des i_1 -ten Kindes von $\langle i \rangle$; Kinder die zum gleichen Zeitpunkt geboren werden, sollen in zufälliger Reihenfolge erfaßt werden.

Dann ist mit $J_n(i) := \{ \langle i | i_1 \dots i_n \rangle : i_r \in \mathbb{N} \text{ für } r = 1, \dots, n \}$

$$J(i) := \{ \langle i \rangle \} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n(i)$$

die Menge aller denkbaren Individuen in der Bevölkerungsentwicklung.

Jedes Individuum $I \in J(i)$ habe die Lebensdauer l_I und erzeuge in seinem Lebensalter $t_I^{(r)}$ seinen r -ten Nachkommen; $l_I, t_I^{(1)}, t_I^{(2)}, \dots$ seien aus $[0, \infty]$. Setze

$$\varphi_I := \{ (l_I; t_I^{(1)}, t_I^{(2)}, \dots) \in [0, \infty]^{\mathbb{N}} : t_I^{(1)} \leq t_I^{(2)} \leq \dots \}.$$

Als Grundmenge für den Wahrscheinlichkeitsraum nehmen wir dann

$$\Omega(i) := \prod_{I \in J(i)} \varphi_I,$$

die Gesamtheit aller denkbaren Familiengeschichten.

Sei $\mathcal{L}_{[0, \infty]}$ die erweiterte Borel- σ -Algebra auf $[0, \infty]$. Dann ist die Spur der Produkt- σ -Algebra $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{L}_{[0, \infty]}$ in φ_I eine σ -Algebra in φ_I , die wir mit $\mathcal{G}_{\varphi_I} := \varphi_I \cap \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{L}_{[0, \infty]}$ bezeichnen. Die Zylindermengen $\prod_{I \in J(i)} A_I$ mit $A_I \in \mathcal{G}_{\varphi_I}$ für alle I und $A_I = \varphi_I$ für fast alle I erzeugen dann eine σ -Algebra in $\Omega(i)$, die wir mit $\mathcal{F}(i)$ bezeichnen.

Nach den Modellannahmen der Einleitung habe jedes Individuum $I \in J(i)$ eine zufällige Lebensdauer L_I und erzeuge zu zufälligen Zeiten (oder Alter) $T_I^{(1)} \leq T_I^{(2)} \leq \dots$ seines Lebens je einen Nachkommen. Falls I aus der k -ten Generation ist, sei P_I die gemeinsame WV von $\{L_I, T_I^{(r)}, r=1, 2, \dots\}$ auf $(\varphi_I, \mathcal{G}_{\varphi_I})$ mit $P_I = P_k$, denn alle Individuen der k -ten Generation sollen die gleiche Lebensdauer- und

Reproduktionsverteilung P_k haben.

$(\varphi_I, \mathcal{G}_{\varphi_I}, P_I)$ ist somit der WR von I.

Als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega(i), \mathcal{F}(i))$ nehmen wir schließlich die eindeutig bestimmte Produktwahrscheinlichkeit (vgl. Loeve 25)

$$P(i) := \bigotimes_{I \in J(i)} P_I \quad \text{S.91}$$

Die Wahl der Produktwahrscheinlichkeit entspricht der Tatsache, daß sich alle Individuen unabhängig voneinander verhalten sollen. Wir schreiben in den folgenden Paragraphen stets P für $P(i)$, wenn dadurch keine Irrtümer entstehen können.

Sei $\Omega_j(i)$ die Gesamtheit aller denkbaren Familiengeschichten des j -ten Nachkommen des Urvaters $\langle i \rangle$: $\Omega_j(i) = \prod_{I \in J(i,j)} \varphi_I$ mit

$$J(i,j) := \{ \langle i|j \rangle \} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \langle i|j i_1 \dots i_n \rangle : i_r \in \mathbb{N}, r = 1, \dots, n \}$$

für $j = 1, 2, \dots$. Definiert man nun wie oben eine $\mathcal{G}$ -Algebra

$\mathcal{F}_j(i)$ und eine Wahrscheinlichkeit $P_j(i)$ auf $\Omega_j(i)$, so gilt

$$(1.1) \quad (\Omega(i), \mathcal{F}(i), P(i)) = (\varphi_{\langle i \rangle}, \mathcal{G}_{\varphi_{\langle i \rangle}}, P_{\langle i \rangle}) \otimes \bigotimes_{j=1}^{\infty} (\Omega_j(i), \mathcal{F}_j(i), P_j(i)) .$$

1.2 Zufällige Funktionen

Zunächst erweitern wir die Begriffsbildung von Crump-Mode [8] auf den generationsabhängigen Fall und definieren auf $\Omega(i)$ einige wichtige Zufallsvariablen :

Definition 1.1 : Für $I \in J(i)$ sei für $t \geq 0$

$$K_I(t) := \# \{ r \in \mathbb{N} : T_I^{(r)} \leq t \}$$

die Anzahl der denkbaren Nachkommen, die I bis einschließlich seinem Alter t erzeugen kann;

$$N_I(t) := \begin{cases} K_I(t) & \text{für } t \leq L_I \\ K_I(L_I) & \text{für } t > L_I \end{cases}$$

die Anzahl der (tatsächlichen) Nachkommen von I bis einschließlich seinem Alter t ;

$N_I := N_I(\infty)$ die Anzahl der Nachkommen von I ;

$G_I(t) := P(L_I \leq t)$ die WV der Lebensdauer von I .

Dann ist $\{K_I(t), t \geq 0\}$ ein stochastischer Zählprozess auf $(\mathcal{F}_I, \mathcal{G}_{\mathcal{F}_I}, P_I)$ und $\{N_I(t), t \geq 0\}$ der zur Zeit t gestoppte Zählprozess.

Bezeichnung : Für alle Individuen I, die zur gleichen Generation, sagen wir zur k -ten, gehören, haben L_I , $\{K_I(t)\}$ und $\{N_I(t)\}$ die gleiche WV. Eine Version dieser Zufallsgrößen bezeichnen wir im folgenden mit L_k , $\{K_k(t)\}$ und $\{N_k(t)\}$. Entsprechend seien $G_k(t)$ und $N_k = N_k(\infty)$ definiert.

Für das Individuum $I = \langle i | i_1 \dots i_n \rangle$ der $i+n$ -ten Generation betrachten wir folgende Ereignisse aus $\mathcal{F}(i)$; für $i, n \in \mathbb{N}_0$:

$$A_I := (I \text{ lebt irgendwann}) = (i_1 \leq N_{i_1}, i_2 \leq N_{i_1 i_1}, \dots, i_n \leq N_{i_1 i_1 \dots i_{n-1}}) ;$$

$$B_{I,t} := (I \text{ ist bis zur Zeit } t \text{ einschließlich geboren}) \\ = A_I \cap (T_{\langle i \rangle}^{(i_1)} + T_{\langle i | i_1 \rangle}^{(i_2)} + \dots + T_{\langle i | i_1 \dots i_{n-1} \rangle}^{(i_n)} \leq t) ;$$

$$D_{I,t} := (I \text{ ist bis zur Zeit } t \text{ einschließlich gestorben}) \\ = A_I \cap (T_{\langle i \rangle}^{(i_1)} + T_{\langle i | i_1 \rangle}^{(i_2)} + \dots + T_{\langle i | i_1 \dots i_{n-1} \rangle}^{(i_n)} + L_{\langle i | i_1 \dots i_n \rangle} \leq t) ;$$

für $I = \langle i \rangle$ sei A_I und $B_{I,t}$ das sichere Ereignis und $D_{I,t} = (L_{\langle i \rangle} \leq t)$;

$$Z_{I,t} := B_{I,t} \cap D_{I,t}^c = (I \text{ lebt zur Zeit } t) .$$

Definition 1.2 : Für $t \geq 0$ sei

$$Z_i(t) := \sum_{I \in J(i)} 1_{Z_{I,t}}$$

die Anzahl der Individuen in der Population zur Zeit t .

Für diese Populationsgröße folgt aus (1.1) die Darstellungsformel

$$(1.2) \quad Z_i(t, \omega) = \delta_{(L_{\langle i \rangle}(\omega) - t)} + \sum_{j=1}^{N_{i,j}(t)(\omega)} Z_{i+1}(t - T_{\langle i \rangle}^{(j)}, \omega_j)$$

mit $\omega \in \Omega(i)$; und $\omega_j \in \Omega_j(i)$ ist die Projektion von ω auf $\Omega_j(i)$; dabei sind $Z_{i+1}(t - T_{\langle i \rangle}^{(j)})$ für $j = 1, 2, \dots$ unabhängig.

Anschauliche Interpretation: Erzeugt der Urvater bis einschließlich

zur Zeit t k Nachkommen zu den aufeinanderfolgenden Zeitpunkten

$T_{\langle i \rangle}^{(j)}$ $j = 1, 2, \dots, k$, so ist die Populationsgröße zur Zeit t gleich der Summe von k Populationsgrößen, die mit dem Individuum $\langle i | j \rangle$ aus der $i+1$ -ten Generation zur Zeit $T_{\langle i \rangle}^{(j)}$ beginnen, nach der Restzeit $t - T_{\langle i \rangle}^{(j)}$ plus einem Term, der gleich 1 ist, wenn $\langle i \rangle$ zur Zeit t noch lebt und andernfalls gleich 0 ist.

Formale Beweise von (1.2) für generationsunabhängige Verzweigungsprozesse findet man bei Harris [16], S. 129, und Jagers [17] .

Definition 1.3 : Es seien die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von

$$\{L_k; K_k(t), t \geq 0\} \text{ für } k = i, i+1, \dots \text{ gegeben.}$$

Dann nennen wir $(\Omega(i), \mathcal{F}(i), P(i), \{Z_i(t), t \geq 0\})$ allgemeinen

altersabhängigen Verzweigungsprozess mit generationsabhängigen

Verteilungen $(P_k)_{k=i, i+1, \dots}$ und mit einem Urvater aus der i -ten

Generation.

Die Folge von WV $(P_k)_{k=i, i+1, \dots}$ sind also die gegebenen Daten , die diesen Verzweigungsprozess bestimmen. Durch spezielle Wahl dieser WV erhält man die bekannten Verzweigungsprozesse als Spezialfälle.

Beispiel 1.1 : Den Crump-Mode-Jagers Prozess oder allgemeinen alters-
abhängigen Verzweigungsprozess, s. Crump-Mode [8] ,

[9] , Jagers [17], [19], erhält man für $i = 0$ und $P_k = P_0$ für $k \in \mathbb{N}_0$, wobei P_0 die gemeinsame WV einer Lebensdauer L und einer Folge von Erzeugungsaltern $T^{(r)}$, $r = 1, 2, \dots$ ist. L habe die VF G und die Folge $\{T^{(r)}, r = 1, 2, \dots\}$ erzeuge den Zählprozess $\{K(t), t \geq 0\}$.

Beispiel 1.2 : Der Bellman-Harris Prozess oder altersabhängige Ver-
zweigungsprozess, s. Harris [16] oder Athreya - Ney

[2] , bei welchem die Individuen alle ihre Nachkommen bei ihrem Tod erzeugen, ist ein spezieller Crump-Mode-Jagers Prozess, bei dem

$K(t) = 0$ für $t < L$ und $K(t) = N$ für $t \geq L$ mit der zufälligen Anzahl N der Nachkommen eines Individuums gilt.

Beispiel 1.3 : Den altersabhängigen Verzweigungsprozess mit variab-
ler Lebensdauerverteilung, den Fildes [14] behandelt,

erhält man aus Definition 1.3, wenn $K_k(t) = 0$ für $t < L_k$ und $K_k(t) = N$ für $t \geq L_k$ ist; N ist wieder die Anzahl der Nachkommen eines Individuums.

Beispiel 1.4 : Der klassische Galton-Watson Prozess, s. Harris [16] oder Athreya-Ney [2], ist ein Bellman-Harris Prozess mit konstanter Lebensdauer $L = 1$.

Bemerkung 1.1 : Identifiziert man bei einem allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozess mit generationsabhängigen Verteilungen Generationen mit Typen, indem man sagt: Individuum I ist vom Typ k , wenn es in der k -ten Generation lebt, so hat man den Spezialfall eines allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozesses mit unendlich vielen Typen. Hier sind es abzählbar viele und es sind nur die Übergänge von Typ k nach Typ $k+1$ möglich. Mode [28] betrachtet einen Bellman-Harris Prozess mit unendlichem Typenraum X , konstruiert aber wegen Meßbarkeitsfragen den WR anders als hier; von der dort entwickelten Theorie ist hier wenig anwendbar, denn der dort benutzte Operator K_λ auf dem Raum der bezüglich des abzählenden Maßes ν auf dem Typenraum X quadratisch integrierbaren Funktionen $L_2(X, \mathcal{B}(X), \nu)$ ist für $\lambda > 0$ nicht streng positiv, da nur die Übergänge von k nach $k+1$ möglich sind.

§ 2 Regularität

In dieser Arbeit sollen nur solche Verzweigungsprozesse betrachtet werden, welche eine Population beschreiben, in der zu endlichen Zeitpunkten mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Individuen leben. Solche Prozesse nennt man nach Sewastjanow [33], S. 180 ff, regulär :

Definition 2.1 : Der Verzweigungsprozess $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ heißt regulär $\Leftrightarrow P(Z_i(t) < \infty) = 1$ für alle $t \geq 0$.

Für den Bellman-Harris Prozess hat Sewastjanow [33], S. 188, und für den Crump-Mode-Jagers Prozess haben Crump-Mode [8] und Jagers [19] hinreichende Bedingungen sowohl für Regularität als auch für Nicht-Regularität angegeben. Für den hier behandelten generations-abhängigen Fall erhält man entsprechende Ergebnisse.

Voraussetzung A : Es existiere eine monoton wachsende, rechtsstetige Funktion $\Delta(t)$ mit $\Delta(t) < \infty$ für $t \geq 0$ und $0 \leq \Delta(0-) \leq \Delta(0) < 1$, so daß für $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$(2.1) \quad E K_n(t) \leq \Delta(t) .$$

Dann erhalten wir

Satz 2.1 : Wenn A gilt, ist $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ regulär für $i = 0, 1, 2, \dots$.

Korollar 2.1 : Wenn A gilt, ist $P(Z_i(t) < \infty \text{ für alle } t \geq 0) = 1$
für $i = 0, 1, 2, \dots$.

Für die Regularität von $\{Z_i(t)\}$ genügt es, (2.1) in Voraussetzung A nur für $n \gg i$ oder für fast alle $n \gg i$ zu fordern, wenn man im letzteren Fall zusätzlich $E K_n(t) < \infty$ für alle $n \gg i$ verlangt. Eine weniger triviale Abschwächung von Voraussetzung A wird in Bemerkung 2.1 erwähnt.

Der untenstehende Beweis von Satz 2.1 benützt die Beweisidee von Crump-Mode [8], die in ihren Grundzügen schon von Harris [16], S. 138-139, verwendet wurde.

Zunächst noch einige Bezeichnungen und Eigenschaften, die wir auch später ab und zu benützen werden :

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$ sei

$$(2.2) \quad \Delta_n(t) := E K_n(t) ;$$

(2.3) $\Delta^{n*}(t)$ die n -fache Faltung von Δ mit sich selbst, wobei man wie üblich $\Delta^{0*}(t) = 1$ für $t \geq 0$ setzt ;

(2.4) $\tau_{n,m}(t) := P(T_I^{(m)} \leq t) = P(K_I(t) \geq m)$,
wenn $I = \langle 0 | i_1 \dots i_n \rangle$ aus $J_n(0)$ und $T_I^{(m)}$ ein in 1.1 definierter Erzeugungszeitpunkt ist.

Es gilt dann

$$(2.5) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{n,m}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} P(K_I(t) \geq m) = E K_n(t) = \Delta_n(t) .$$

Für $i \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$ und mit $B_{I,t}$ aus 1.2 sei

$$(2.6) \quad B_i(t) := \sum_{I \in J(i)} \mathbb{1}_{B_{I,t}}$$

die Anzahl der bis zur Zeit t geborenen Individuen in der Population

mit einem Ur Vater $\langle i \rangle$. Natürlich ist

$$(2.7) \quad B_i(t) \gg Z_i(t) \quad \text{für } t \gg 0 \text{ und für alle } i,$$

was man formal aus $Z_{I,t} \subseteq B_{I,t}$ erhält.

Wir kommen nun zum

Beweis von Satz 2.1 : Wegen (2.7) genügt es, $E B_i(t) < \infty$ für $t \gg 0$ zu zeigen. Sei o.B.d.A. $i = 0$.

Für $I \in J(0)$, $t \gg 0$ setzen wir

$$b_I(t) := 1, \text{ falls } I = \langle 0 \rangle \text{ oder falls } I = \langle 0 | i_1 \dots i_n \rangle \text{ und}$$

$$T_{\langle 0 \rangle}^{(i_1)} + T_{\langle 0 | i_1 \rangle}^{(i_2)} + \dots + T_{\langle 0 | i_1 \dots i_{n-1} \rangle}^{(i_n)} \leq t,$$

$$b_I(t) := 0 \text{ andernfalls.}$$

$$\text{Wegen } B_{I,t} \subseteq (b_I(t) = 1) \text{ ist } B_0(t) \leq \sum_{I \in J(0)} b_I(t)$$

und es folgt für die Erwartungswerte

$$(2.8) \quad E B_0(t) \leq \sum_{I \in J(0)} E b_I(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I \in J_n(0)} E b_I(t).$$

Nun sind die ZV $T_{\langle 0 \rangle}^{(i_1)}, T_{\langle 0 | i_1 \rangle}^{(i_2)}, \dots, T_{\langle 0 | i_1 \dots i_{n-1} \rangle}^{(i_n)}$ unabhängig,

da sie zu verschiedenen Individuen gehören, für $n \in \mathbb{N}_0$, $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$.

Nach Definition der $b_I(t)$ und (2.4) folgt aber

$$\begin{aligned} E b_I(t) &= P(T_{\langle 0 \rangle}^{(i_1)} + T_{\langle 0 | i_1 \rangle}^{(i_2)} + \dots + T_{\langle 0 | i_1 \dots i_{n-1} \rangle}^{(i_n)} \leq t) \\ &= \tau_{0,i_1} * \tau_{1,i_2} * \dots * \tau_{n-1,i_n}(t). \end{aligned}$$

Wegen (2.5) ist dann

$$\begin{aligned} (2.9) \quad \sum_{I \in J_n(0)} E b_I(t) &= \sum_{(i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n} \tau_{0,i_1} * \dots * \tau_{n-1,i_n}(t) \\ &= \Delta_0 * \dots * \Delta_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Aus Voraussetzung A, (2.2) und (2.3) folgt durch Induktion sofort

$$(2.10) \quad \Delta_0 * \dots * \Delta_{n-1}(t) \leq \Delta^{n*}(t) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } n \geq 1.$$

Aus den Eigenschaften von Δ in Voraussetzung A folgt für die Summe der Faltungsprodukte

$$(2.11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{n*}(t) < \infty \quad \text{für } t \geq 0$$

(vgl. Lemma 5.2.1 in Jagers [19] oder Lemma 4.1 in Crump-Mode [8]).

Setzt man (2.9) - (2.11) in (2.8) ein, erhält man $E B_0(t) < \infty$ für $t \geq 0$ und aus (2.7) schließlich die Behauptung für $i = 0$. □

Beweis von Korollar 2.1 : Sei $i \in \mathbb{N}_0$ fest. Da $B_i(t)$ in t monoton wächst, ist $B_i(t) < \infty$ für alle $t \geq 0$

genau dann, wenn $B_i(n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jetzt ist

$$\begin{aligned} P(Z_i(t) < \infty \text{ für alle } t \geq 0) &\geq P(B_i(t) < \infty \text{ für alle } t \geq 0) \\ &= P(B_i(n) < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) \\ (2.12) \quad &= P(\lim_{n \rightarrow \infty} (B_i(n) < \infty)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_i(n) < \infty) , \end{aligned}$$

da $\{ B_i(n) < \infty, n \in \mathbb{N} \}$ eine monoton fallende Folge von Ereignissen ist.

Aus dem Beweis von Satz 2.1 folgt $P(B_i(n) < \infty) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit dann aus (2.12) die Behauptung des Korollars. □

Bemerkung 2.1 :

a) Einen anderen Beweis der Regularität liefert eine von Jagers [19],

6.2, benutzte Methode, einen allgemeinen Verzweigungsprozess durch einen Galton-Watson Prozess zu "majorisieren" :

Dazu beachtet man, daß nach Voraussetzung A für ein $t > 0$ $\Delta(t) < \infty$ ist, daß $\Delta(t) \downarrow \Delta(0) < 1$ für $t \downarrow 0$ monoton konvergiert und daß

folglich wegen der Rechtsstetigkeit von Δ ein $u > 0$ mit $\Delta(u) < 1$ existiert.

Es sei nun $\eta_0 = 1$ und für $n = 1, 2, \dots$

η_n = Anzahl der Individuen $I \in J_n(o)$, die und deren Vorfahren höchstens bis zum Alter u der Mutter(bzw des Vaters) geboren wurden; d.h.

für $I = \langle o | i_1 \dots i_n \rangle$ muß $T_{\langle o | i_1 \dots i_{j-1} \rangle}^{(ij)} \leq u$ für $j = 1, \dots, n$ sein.

Dann ist $\{\eta_n\}$ ein Galton-Watson Prozess in variierender Umgebung (s. § 3). Ist Z_n die Anzahl der Nachkommen eines Individuums der n -ten Generation, so gilt

$$E Z_n \leq \Delta_n(u) \leq \Delta(u) < 1 ;$$

$$(2.13) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} E \eta_n < \infty ;$$

$$(2.14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1 - P(Z_n = 1)) \gg \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \Delta(u)) = \infty .$$

Wegen (2.13) und (2.14) stirbt nach Jagers [19], Korollar 3.5.4, dieser inhomogene Galton-Watson Prozess $\{\eta_n\}$ f.s. aus.

Für $t \in [0, u]$ ist $B_0(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n < \infty$ f.s. und $B_i(t) < \infty$ f.s.

für $i \in \mathbb{N}_0$. Analog Jagers [19], Theorem 6.2.2, schließt man mit Hilfe einer (1.2) entsprechenden Darstellungsformel für $B_i(t)$ und einem Induktionsargument $B_i(t) < \infty$ f.s. für alle $t \geq 0$ und alle $i \in \mathbb{N}_0$.

b) Analog Jagers [19], Theorem 6.2.3, ist für Regularität hinreichend, daß ein $u > 0$ existiert, so daß $\Delta(u) \leq 1$ und

$P(N_n(o) = 1) \leq c < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

c) Ist $\Delta_n(o) \geq c_1 > 1$, $G_n(o) \leq c_2 < 1$ und $E K_n(o)^2 \leq c_3 < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, kann man die Nicht-Regularität von $\{Z_i(t)\}$ zeigen, indem man einen inhomogenen Galton-Watson Prozess $\{\bar{\eta}_n\}$ definiert, so daß $B_i(o) = Z_i(o) \gg \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\eta}_n$ und $P(\bar{\eta}_n \rightarrow 0) = \bar{q} < 1$ ist. Man setzt dazu analog Jagers [19], Theorem 6.2.1, $\bar{\eta}_n$ = Anzahl der Individuen $I \in J_n(o)$, die zur Zeit $t = 0$ geboren werden, und verwendet Ergebnisse von Agresti [1].

§ 3 Der eingebettete Galton-Watson Prozess der Generationen und die Aussterbewahrscheinlichkeit

Unter der n -ten Populationsgeneration eines generationsabhängigen altersabhängigen Verzweigungsprozesses mit einem Urvater aus der i -ten Generation verstehen wir alle Individuen aus $J_n(i)$, die tatsächlich in der Population vorkommen; $J_0(i) = \{ \langle i \rangle \}$. Formal:

Definition 3.1 : Für $i \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$\mathfrak{Z}_n(i) := \sum_{I \in J_n(i)} 1_{A_I}$$

Größe der n -ten Populationsgeneration bei Urvater $\langle i \rangle$.

Man beachte, daß Individuen der n -ten Populationsgeneration bei Urvater $\langle i \rangle$ in der laufenden Generation $i+n$ sind. Die Populationsgeneration eines Individuums ist also die Anzahl seiner Vorfahren in der Population.

Nach Definition 1.1 und der anschließenden Bezeichnungsweise ist die gesamte Anzahl $N_1(\infty)$ von Nachkommen eines Individuums I der k -ten Generation wie N_k verteilt und hat die WEF $h_k(s) := E s^{N_k}$, $|s| \leq 1$.

Dann gilt

Satz 3.1 : $\{ \mathfrak{Z}_n(i), n = 0, 1, 2, \dots \}$ ist ein Galton-Watson Prozess in variierender Umgebung mit der Folge $\{ h_n(s) \}_{n=i, i+1, \dots}$ von WEF für die Nachkommensverteilungen.

Zum Beweis von Satz 3.1 bemerken wir nur, daß er wie der Beweis von

Theorem 5.1 bei Harris [16], S. 127, geführt wird: Man verwendet die Unabhängigkeit der Nachkommenschaften verschiedener Individuen und beachtet, daß jetzt die Nachkommensverteilungen sich mit den Generationen ändern können.

Solche "inhomogene" Galton-Watson Prozesse mit generationsabhängiger Nachkommensverteilung wurden von Jagers [19] unter dem Namen "Galton-Watson Prozesse in variierender Umgebung" ausführlich untersucht. Mit den entsprechenden Voraussetzungen an die WV von N_k kann man diese Ergebnisse hier anwenden.

Insbesondere ist die Aussterbewahrscheinlichkeit von $\{Z_n(i)\}$ gleich

$$P(\{Z_n(i) = 0 \text{ für ein } n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{Z_n(i) = 0\})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} h_i(h_{i+1}(\dots h_{i+n-1}(0) \dots))$$

wohldefiniert ;

sie ist gleich 1, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - P(N_k(\infty) = 1)) = \infty \quad \text{und}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=i}^{i+n-1} h'_k(1) < \infty \quad \text{ist.}$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Aussterben mit Wahrscheinlichkeit 1 erhält Agresti [1] unter gewissen Regularitätsannahmen für die ersten beiden Ableitungen der WEF der Nachkommensverteilungen.

Definition 3.2 : Sei $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ ein generationsabhängiger allgemeiner altersabhängiger Verzweigungsprozess mit Urvater $\langle i \rangle$; $i \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt $q_i := P(Z_i(t) = 0 \text{ für ein } t \geq 0)$ Aussterbewahrscheinlichkeit dieses Verzweigungsprozesses.

Für die Aussterbewahrscheinlichkeit gilt

Satz 3.2 : Es gelte Voraussetzung A und $G_k(\infty) = 1$ für $k \geq i$.

Dann haben die Verzweigungsprozesse $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ und $\{\zeta_n(i), n = 0, 1, 2, \dots\}$ die gleiche Aussterbewahrscheinlichkeit.

Beweis : O.B.d.A. sei $i = 0$. Mit

$$A := (\zeta_n(0) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}),$$

$$B := (Z_0(t) = 0 \text{ für ein } t \geq 0)$$

genügt es, nachzuweisen, daß

$$a) P(A^c B) = 0 \quad \text{und} \quad b) P(A B^c) = 0 \text{ gilt.}$$

Nachweis von a) : Sei $t \geq 0$ fest. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (3.1) \quad & P(\zeta_n(0) > 0, Z_0(t) = 0) \\ & \leq \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} P(\langle 0 | i_1 \dots i_n \rangle \text{ lebt und } Z_0(t) = 0) \\ & \leq \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} P(\tau_{\langle 0 \rangle}^{(i_1)} + \dots + \tau_{\langle 0 | i_1 \dots i_{n-1} \rangle}^{(i_n)} + L_{\langle 0 | i_1 \dots i_n \rangle} \leq t) \\ & = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} \tau_{0, i_1} * \dots * \tau_{n-1, i_n} * G_n(t) \\ & = \Delta_0 * \dots * \Delta_{n-1} * G_n(t) \leq \Delta^{n*}(t) \end{aligned}$$

nach (2.4), (2.5) und (2.10). Da nach (2.11) $\Delta^{n*}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, folgt

$$P(A^c \cap (Z_0(t) = 0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\zeta_n(0) > 0, Z_0(t) = 0) = 0;$$

$$\Rightarrow P(A^c B) \leq P(A^c \cap (Z_0(m) = 0 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}))$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} P(A^c \cap (Z_0(m) = 0)) = 0.$$

Nachweis von b) : Sei

$C := (L_I < \infty , K_I(t) < \infty \text{ für alle } t \geq 0 \text{ und } I \in J(0))$.

Dann wird

$P(A B^c C^c) \leq P(\text{es gibt ein } I \text{ mit } L_I = \infty \text{ oder } K_I(m) = \infty \text{ für ein } m \in \mathbb{N})$

$$(3.2) \quad \leq \sum_{I \in J(0)} \sum_{m=1}^{\infty} P(K_I(m) = \infty) + \sum_{I \in J(0)} P(L_I = \infty) .$$

Ist I aus der n -ten Generation, folgt $P(L_I = \infty) = 1 - G_n(\infty) = 0$

und $P(K_I(t) = \infty) = 0$ für alle $t \geq 0$, da $\Delta_n(t) < \infty$. Folglich ist

die rechte Seite von (3.2) gleich 0. Da trivialerweise

$P(A B^c C) = 0$ ist, ist damit die Teilbehauptung b) bewiesen. □

Bemerkung 3.1 : a) Ein kurzes und anschauliches Argument von Jagers

[19], S. 140, kann im Fall a) des Beweises von Satz 3.2

auf den generationsabhängigen Fall übertragen werden: Wenn $\sum_n (i) \not\rightarrow 0$,

werden unendlich viele Individuen geboren. Diese müssen dann alle bis zur Zeit t wieder gestorben sein, können deswegen also alle nur vor der Zeit t geboren sein, was nach § 2 nur mit W_0 möglich ist.

b) Aus $q_i = P(\sum_n (i) \rightarrow 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_i(h_{i+1}(\dots h_{i+n-1}(0) \dots))$

folgt sofort, daß die Aussterbewahrscheinlichkeiten q_i dem Gleichungs-

system $q_i = h_i(q_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}_0$, genügen.

§ 4 Systeme von Integralgleichungen für wahrscheinlichkeits- erzeugende Funktionen und Momente der Populationsgröße

Wie bei den bekannten Verzweigungsprozessen ist die WEF der Populationsgröße $Z_i(t)$ ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von $Z_i(t)$ und ihrer Charakteristiken. Wir definieren sie für betragsmäßig durch 1 beschränkte komplexe Argumente und schränken uns später, wo nötig, auf reelle Teile dieses Definitionsbereichs ein; setze $0^0 := 1, s^\infty := 0$ für $|s| \leq 1$.

Definition 4.0 : Für $s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1, t \geq 0, i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$(4.0) \quad F_i(s, t) := E s^{Z_i(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_i(t) = n) s^n.$$

Die Existenz von Lösungen der folgenden Integralgleichungssysteme läßt sich unter recht schwachen Voraussetzungen an die WV von $\{L_k; (K_k(t), t \geq 0)\}_{k=0,1,\dots}$ beweisen. Für Eindeutigkeitsfragen und für die Behandlung der Momente werden jedoch stärkere Voraussetzungen benötigt, die wir der Übersichtlichkeit wegen hier zusammen aufführen:

Voraussetzung B : Voraussetzung A und G_k ist eine stetige VF mit $G_k(0) = 0, G_k(\infty) = 1$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Voraussetzung C : $m_k := E N_k \leq m < \infty$ für $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{R}$.

Voraussetzung D : Es existiere eine Funktion $\Delta_2(t)$ mit $\Delta_2(0) < 1$ und $E K_k(t)^2 \leq \Delta_2(t) < \infty$ für $t \geq 0, k \in \mathbb{N}_0$.

4.1 Die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen

Für die folgenden Betrachtungen ist bedeutsam, daß $E N_k(t)$, die mittlere Anzahl von Nachkommen, die ein Individuum bis zu seinem Alter t erzeugen kann, als eine nicht normierte VF aufgefaßt werden kann.

Definition 4.1 : Für $k \in \mathbb{N}_0$, $t, y \geq 0$ sei

$$F_k(t) := E N_k(t) \quad \text{die Reproduktionsfunktion} \\ \text{der } k\text{-ten Generation,}$$

$$F_{k,y}(t) := E [N_k(t) / L_k = y] .$$

$F_k(t)$ und $F_{k,y}(t)$ sind als Funktionen, von t nicht negativ, monoton wachsend und rechtsstetig. $F_{k,y}(t)$ ist eine Version des bedingten Erwartungswertes von $N_k(t)$ gegeben $L_k = y$, die bezüglich y auf $\mathbb{R}$ borel-meßbar ist und für die gilt:

$$\int_B F_{k,y}(t) dG_k(y) = \int_{L_k(B)}^{-1} N_k(t) dP \quad \text{für alle } B \in \mathcal{L}_{[0,\infty]} .$$

Folglich ist

$$(4.1) \quad F_k(t) = \int_0^\infty F_{k,y}(t) dG_k(y) .$$

Bemerkung 4.1 : Formeln für $F_k(t)$ und $F_{k,y}(t)$ werden einfacher, wenn für alle Individuen I die Lebensdauer L_I unabhängig von dem Prozess der Erzeugungsalter $\{K_I(t), t \geq 0\}$ ist. Dann wird mit (2.2) und Definition 1.1

$$F_{k,y}(t) = \Delta_k(y) \quad \text{für } t > y \quad \text{und} \quad F_{k,y}(t) = \Delta_k(t) \quad \text{für } t \leq y ;$$

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \int_0^t \Delta_k(y) dG_k(y) + \Delta_k(t) (1 - G_k(t)) \\ &= \int_0^t (1 - G_k(y)) d\Delta_k(y) + \Delta_k(0) (1 - G_k(0)) . \end{aligned}$$

Existiert eine stetige Funktion $b_k(t)$ mit $\Delta_k(t) = \int_0^t b_k(u) du$ für $t \geq 0$, ist $F_k(t) = \int_0^t (1 - G_k(y)) b_k(y) dy$. Man nennt $b_k(t)$ die Geburtsrate und $(1 - G_k(t) \cdot b_k(t))$ die Netto-Mutterschaftsfunktion der k-ten Generation (vgl. Mode [29]) .

Definition 4.2 : Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\phi: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ so, daß der folgende Erwartungswert existiert.

$$H_{k,y}(\phi(\cdot)) := E \left[\exp \left(\int_0^\infty \log \phi(u) dN_k(u) \right) / L_k = y \right]$$

heißt dann bedingtes WE-Funktional von N_k gegeben $L_k = y$.

Wir setzen für $i \in \mathbb{N}_0$

$$(4.2) \quad \hat{F}_i(s, t) := \begin{cases} F_i(s, t) & \text{für } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } t < 0 \end{cases}, |s| \leq 1.$$

Bedingt man $Z_0(t)$ nach der Lebensgeschichte des Urvaters $\langle 0 \rangle$ und beachtet man (1.2) für $i = 0$, erhält man

$$\begin{aligned} F_0(s, t) &= E E \left[s^{Z_0(t)} / \mathcal{G}_{\mathcal{P}_{\langle 0 \rangle}} \right] \\ &= \int_0^\infty E \left[s^{\delta(y-t)} \frac{N_{\langle 0 \rangle}(t)}{\prod_{j=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t)}} E \left[s^{Z_1(t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)})} / \mathcal{G}_{\mathcal{P}_{\langle 0 \rangle}} \right] / L_0 = y \right] dG_0(y) \\ (4.3) \quad &= \int_0^\infty s^{\delta(y-t)} E \left[\frac{N_{\langle 0 \rangle}(t)}{\prod_{j=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t)}} F_1(s, t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)}) / L_0 = y \right] dG_0(y) \\ &= \int_0^{t+} H_{0,y}(\hat{F}_1(s, t-)) dG_0(y) + s \int_{t+}^\infty H_{0,y}(\hat{F}_1(s, t-)) dG_0(y); \end{aligned}$$

die letzte Zeile folgt sofort aus Definition 4.2 für $H_{0,y}$ und

$$\frac{N_{\langle 0 \rangle}(t)}{\prod_{j=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t)}} F_1(s, t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)}) = \exp \left(\int_0^t \log(F_1(s, t-u)) dN_{\langle 0 \rangle}(u) \right).$$

Argumentiert man bei einem Urvater $\langle i \rangle$ analog, erhält man

Satz 4.1 : Die Folge $\{\hat{F}_i(s,t) : i \in \mathbb{N}_0\}$ erfüllt das System von Integralgleichungen für $|s| \leq 1$, $i \in \mathbb{N}_0$:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \hat{F}_i(s,t) &= \int_{0-}^{t+} H_{i,y}(\hat{F}_{i+1}(s,t-)) dG_i(y) + \\ &+ s \int_{t+}^{\infty} H_{i,y}(\hat{F}_{i+1}(s,t-)) dG_i(y), \quad t \geq 0 \\ \hat{F}_i(s,t) &= 1 \quad \text{für } t < 0. \end{aligned}$$

Da wir in § 1 $Z_i(t)$ auf konstruktivem Weg erhalten haben, haben wir auch $F_i(s,t)$ konstruiert. Aus Satz 4.1 folgt somit die Existenz eines Lösungssystems für das Integralgleichungssystem (4.4) .

Bemerkung : Analog Harris [16], Theorem 9.1, kann man die Existenz eines Lösungssystems von WEF für (4.4) auch dadurch zeigen, daß man $F_i(s,t)$ durch $F_i^{(n)}(s,t) = E s^{Z_i^{(n)}(t)}$ approximiert; $Z_i^{(n)}(t)$ ist die Anzahl der Individuen in den Populationsgenerationen $0, 1, \dots, n-1$ zur Zeit t ; siehe Tabelle 7.22 und Formel 7.23 .

Zur Eindeutigkeit der Lösungen von (4.4) gilt

Satz 4.2 : Es gelte Voraussetzung B, $\Delta(0) = 0$ und $E N_k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann hat für $s \in [0,1]$ das System (4.4) eine eindeutig bestimmte Lösungsfolge $\{\hat{F}_i(s,t) : i \in \mathbb{N}_0\}$ von WEF.

Beweis : Für die konstruktiv gefundene Lösung $\{\hat{F}_i(s,t)\}$ gilt $\hat{F}_i(s,t) \leq 1$ für $s \in [0,1]$, $t \geq 0$.

Sei $\{\hat{\mathcal{F}}_i(s,t)\}$ eine weitere Lösungsfolge von (4.4) mit dieser Eigenschaft. Dann ist $\hat{\mathcal{F}}_i \equiv \mathcal{F}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen.

Dieser Nachweis beruht auf den beiden folgenden Lemmata : Lemma 4.2 ist eine generationsabhängige Version von Lemma 3.2 von Doney [11]. Lemma 4.1 ist eine Verallgemeinerung für nicht normierte VF von Lemma 2.3 von Fildes [14], zu dessen Beweis Fildes nur auf Bellman-Cooke [3], Lemma 7.1, verweist. Wir bringen hier einen Beweis von Lemma 4.1 und damit auch von Lemma 2.3 von Fildes [14], indem wir den Beweis von Bellman-Cooke [3], auf die Generationsabhängigkeit erweitern.

Lemma 4.1 : Für $i \in \mathbb{N}_0$ seien

- (i) $a_i(t)$ nicht negative, auf endlichen t-Intervallen gleichmäßig beschränkte Funktionen,
- (ii)
$$a_i(t) \leq \varepsilon_i + \bar{m} \int_0^t a_{i+1}(t-u) d\bar{G}_i(u)$$
 mit $0 \leq \bar{m} < \infty$ und $|\varepsilon_i| \leq M < \infty$,
- (iii) $\bar{G}_i(t) \leq \bar{G}(t)$ und $\bar{G}$ ist eine nicht notwendig zu 1 normierte VF mit $\bar{G}(0) = 0$.

Dann existiert ein $\delta \geq 0$ und ein $c \in [0,1]$, so daß

$$a_i(t) \leq M \exp(\delta t) / (1 - c)$$
für $t \geq 0$ und $i \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beweis : Wir verallgemeinern den Beweis von Lemma 7.1 von Bellman-Cooke [3] :

Definiere für $i \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$, mit einem später zu bestimmenden $\delta \geq 0$

$$v_i(t) := \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \{ \exp(-\delta t_1) a_i(t_1) \}.$$

Nach Voraussetzung (i) existiert dann eine Funktion $v(t)$, so daß

$$v_i(t) \leq v(t) \text{ für } t \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_i(t) e^{-\delta t} &\leq \xi_i e^{-\delta t} + \bar{m} e^{-\delta t} \int_0^t a_{i+1}(t-u) d\bar{G}_i(u) \\ &\leq M e^{-\delta t} + \bar{m} \int_0^t a_{i+1}(t-u) e^{-\delta(t-u)} e^{-\delta u} d\bar{G}_i(u) \end{aligned}$$

nach (ii). Bildet man $\sup_{0 \leq t_1 \leq t}$ auf beiden Seiten, so folgt

$$v_i(t) \leq M + \bar{m} v_{i+1}(t) \int_0^t e^{-\delta u} d\bar{G}_i(u).$$

Partielle Integration und (iii) liefern

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\delta u} d\bar{G}_i(u) &\leq \int_0^t e^{-\delta u} d\bar{G}(u). \text{ Wählt man } \delta \geq 0, \text{ so daß} \\ \bar{m} \int_0^\infty e^{-\delta u} d\bar{G}(u) &= c \in [0,1], \text{ dann ist für } i \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_i(t) &\leq M + \bar{m} v_{i+1}(t) \int_0^t e^{-\delta u} d\bar{G}_i(u) \\ &\leq M + c v_{i+1}(t) \leq M + c M + c^2 v_{i+2}(t) \leq \dots \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ M \sum_{r=0}^{n-1} c^r + c^n v_{i+n}(t) \right\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ M \sum_{r=0}^{n-1} c^r + c^n v(t) \right\} = M \sum_{r=0}^{\infty} c^r = \frac{M}{1-c}, \end{aligned}$$

da $c \in [0,1]$. Folglich ist $a_i(t) \leq v_i(t) e^{\delta t} \leq \frac{M}{1-c} e^{\delta t}$ für $t \geq 0$ und für alle $i \in \mathbb{N}_0$. □

Lemma 4.2 : Sei $E N_k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\left| H_{i,y}(\hat{F}_i(s, t-)) - H_{i,y}(\hat{\mathcal{F}}_i(s, t-)) \right| \\ &\leq \int_0^t |\hat{F}_{i+1}(s, t-u) - \hat{\mathcal{F}}_{i+1}(s, t-u)| dF_{i,y}(u) \\ &\text{für } |s| \leq 1, t \geq 0, y \geq 0, i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Beweis : Die behauptete Ungleichung folgt direkt aus dem Beweis von Lemma 3.1 von Doney [11], indem man bezüglich $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_i}$ bedingt und (1.2) anwendet.

Den Beweis von Satz 4.2 führen wir zu Ende, indem wir zunächst Lemma 4.2 benutzen:

Da $\{\hat{F}_i\}$ und $\{\hat{\mathcal{F}}_i\}$ (4.4) erfüllen, gilt für $s \in [0,1], i \in \mathbb{N}_0, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} & |F_i(s,t) - \mathcal{F}_i(s,t)| \\ & \leq \int_0^\infty |H_{i,y}(\hat{F}_{i+1}(s,t-)) - H_{i,y}(\hat{\mathcal{F}}_{i+1}(s,t-))| dG_i(y) \\ & \leq \int_0^\infty dG_i(y) \int_0^\infty |\hat{F}_{i+2}(s,t-u) - \hat{\mathcal{F}}_{i+2}(s,t-u)| dF_{i,y}(u) \\ & = \int_0^\infty |\hat{F}_{i+2}(s,t-u) - \hat{\mathcal{F}}_{i+2}(s,t-u)| dF_i(u) \end{aligned}$$

nach Lemma 4.2 und (4.1).

Nach Voraussetzung B ist $F_i(t) \leq \Delta(t)$ für $t \geq 0$

und $|\hat{F}_i(s,t) - \hat{\mathcal{F}}_i(s,t)|$ ist für $s \in [0,1]$ nicht negativ und auf endlichen t -Intervallen bezüglich i gleichmäßig beschränkt.

Sei nun $s \in [0,1]$ und $i \in \mathbb{N}_0$ fest. Setzt man

$$a_0(t) := |\hat{F}_i(s,t) - \hat{\mathcal{F}}_i(s,t)|,$$

$$a_1(t) := |\hat{F}_{i+21}(s,t) - \hat{\mathcal{F}}_{i+21}(s,t)| \quad \text{für } 1 = 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{E}_1 := 0, \quad \bar{G}_1 := F_{i+21}, \quad \bar{G} := \Delta, \quad \bar{m} := 1$$

so sieht man, daß die Voraussetzungen von Lemma 4.1 erfüllt sind

und wir erhalten $|\hat{F}_i(s,t) - \hat{\mathcal{F}}_i(s,t)| = 0$ für alle $t \geq 0$, da M

gleich 0 gewählt werden kann. Da $s \in [0,1]$ und $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig waren

folgt die Behauptung von Satz 4.2. □

Bemerkung 4.2 : Man kann auch für die gemeinsamen WEF der
Populationsgrößen zu verschiedenen Zeitpunkten
ein System von Integralgleichungen aufstellen.

Definiert man für $|s|, |\varpi| \leq 1, t, \tau \geq 0, i \in \mathbb{N}_0$

$$F_i(s, \varpi; t, \tau) := E \left[s^{Z_i(t)} \varpi^{Z_i(t+\tau)} \right]$$

so erfüllen diese WEF das System

$$\begin{aligned} F_i(s, \varpi; t, \tau) = & \int_0^t H_{i,y}(\hat{\hat{F}}_{i+1}(\cdot)) dG_i(y) \\ & + s \int_t^{t+\tau} H_{i,y}(\hat{\hat{F}}_{i+1}(\cdot)) dG_i(y) \\ & + s \varpi \int_{t+\tau}^{\infty} H_{i,y}(\hat{\hat{F}}_{i+1}(\cdot)) dG_i(y) \end{aligned}$$

mit $\hat{\hat{F}}_{i+1}(\cdot) := \hat{F}_{i+1}(s, \varpi; t-\cdot, \tau) \cdot \tilde{F}_{i+1}(\varpi; t, t+\tau-\cdot)$,

$$\hat{F}_{i+1}(s, \varpi; t-u, \tau) := \begin{cases} F_{i+1}(s, \varpi; t-u, \tau) & \text{für } 0 \leq u \leq t \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(4.6)

$$\tilde{F}_{i+1}(\varpi; t, t+\tau-u) := \begin{cases} F_{i+1}(\varpi, t+\tau-u) & \text{für } t \leq u \leq t+\tau \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $|s|, |\varpi| \leq 1; t, \tau \geq 0, i \in \mathbb{N}_0$.

4.2 Die Erwartungswerte

Die ersten beiden Momente der Populationsgröße sind einfacher zu untersuchen als die WEF; man erhält für sie eine noch einigermaßen explizite Darstellung der Lösung des entstehenden Systems von Integralgleichungen.

Definition 4.3 : Für $t \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ sei $M_i(t) := E Z_i(t)$.

Bezeichnung : Für eine explizite Darstellung der Momente benötigen wir sukzessive Faltungen der Reproduktionsfunktionen:

Wir setzen für $i, n \in \mathbb{N}_0$ und $t \geq 0$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} F_{i,i-1}^*(t) &:= 1, \\ F_{i,i+n}^*(t) &:= F_{i,i+n-1}^* * F_{i+n}(t) \\ &= F_i * \dots * F_{i+n}(t). \end{aligned}$$

$F_i(t)$ und diese Faltungen werden nur für nicht negative t betrachtet; für negative t kann man alle Funktionen gleich 0 setzen.

Satz 4.3 : Es gelte die Voraussetzung B. Dann gilt

- a) Die Folge der Erwartungswerte $\{M_i(t) : i \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichmäßig beschränkt auf endlichen t -Intervallen und erfüllt

$$(4.6) \quad M_i(t) = 1 - G_i(t) + \int_0^t M_{i+1}(t-u) dF_i(u) \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

- b) Das System (4.6) hat eine eindeutig bestimmte Lösungsfolge, deren Glieder auf endlichen t -Intervallen gleichmäßig beschränkt sind.

c) Es gilt für $t \geq 0, i \in \mathbb{N}_0$

$$(4.7) \quad M_i(t) = 1 + \sum_{j=i}^{\infty} F_{i,j-1}^* (F_j - G_j)(t) .$$

Beweis : Teil a : Da B gilt, sind die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt und man erhält wie in (2.7) - (2.11)

$M_i(t) \leq E B_i(t) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{n*}(t) < \infty$ für $t \geq 0, i \in \mathbb{N}_0$. Folglich ist $M_i(t)$ auf endlichen t -Intervallen gleichmäßig beschränkt.

Die Gültigkeit von (4.6) ließe sich durch Differentiation der WEF $F_i(s, t)$ in (4.4) an der Stelle 1- beweisen; einfacher und klarer scheint uns der direkte Weg. Sei o.B.d.A. $i = 0$.

$$\begin{aligned} M_0(t) &= E E[Z_0(t) / \mathcal{G}_{\varphi_{\langle 0 \rangle}}] \\ &= E E \left[\delta(L_{\langle 0 \rangle} - t) + \sum_{j=1}^{N_0(t)} Z_1(t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)}) / \mathcal{G}_{\varphi_{\langle 0 \rangle}} \right] \\ &= E [\delta(L_{\langle 0 \rangle} - t)] + E \left[\sum_{j=1}^{N_0(t)} M_1(t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)}) \right] \\ &= \int_0^{\infty} \delta(u - t) dG_0(u) + E \left[\int_0^t M_1(t - u) dN_{\langle 0 \rangle}(u) \right] \\ &= 1 - G_0(t) + \int_0^t M_1(t - u) dF_0(u) , \end{aligned}$$

unter Verwendung von (1.2) und dem Satz von Fubini.

Teil b : Sei $\{m_i(t) : i \in \mathbb{N}_0\}$ ein weiteres System von Lösungen von (4.6), die auf endlichen t -Intervallen gleichmäßig beschränkt sind.

Dann ist für festes $t \geq 0$

$$M_i(t) - m_i(t) = \int_0^t (M_{i+1}(t-u) - m_{i+1}(t-u)) dF_i(u)$$

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad &= (M_{i+1} - m_{i+1}) * F_i(t) \\
 &= (M_{i+n} - m_{i+n}) * F_{i+n-1} * \dots * F_i(t)
 \end{aligned}$$

durch wiederholtes Anwenden von (4.6) .

Da $F_i(t) = E N_i(t) \leq E K_i(t) \leq \Delta(t)$, folgt $F_{i,i+n-1}^* \leq \Delta^{n*}(t)$;

und nach Voraussetzung existiert eine Funktion $\beta(t)$, so daß

$$|M_{i+n}(t) - m_{i+n}(t)| \leq \beta(t) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} .$$

$$\xrightarrow{(4.8)} |M_i(t) - m_i(t)| \leq \beta(t) \Delta^{n*}(t) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} .$$

Da nach (2.11) $\Delta^{n*}(t) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ bei festem t , folgt

$M_i(t) = m_i(t)$. Da $t \geq 0$ beliebig war, folgt dann die Behauptung b.

Teil c : Beachtet man, daß wegen $F_i(t) \leq \Delta(t)$ und (2.10) die rechte Seite von (4.7) auf endlichen t -Intervallen gleichmäßig beschränkt ist, erhält man die Gültigkeit von (4.7) sofort durch Einsetzen in (4.6), da nur eine auf endlichen t -Intervallen gleichmäßig beschränkte Lösung von (4.6) existiert.



4.3 Die zweiten Momente

Definition 4.4 : Für $t \geq 0, \tau \geq 0, i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$M_i(t, \tau) := E [Z_i(t) Z_i(t + \tau)] .$$

Satz 4.4 : Es gelten die Voraussetzungen B und D. Dann gilt

- a) $\{M_i(t, \tau) : i \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichmäßig beschränkt auf endlichen (t, τ) -Intervallen und erfüllt für $t, \tau \geq 0$

$$(4.9) \quad M_i(t, \tau) = f_i(t, \tau) + \int_0^t M_{i+1}(t-u, \tau) dF_i(u)$$

für $i \in \mathbb{N}_0$ mit

$$(4.10) \quad f_i(t, \tau) =$$

$$(1) \quad 1 - G_i(t + \tau)$$

$$(2) \quad + E \left[\delta(L_i - t - \tau) \int_0^t M_{i+1}(t-u) dN_i(u) \right]$$

$$(3) \quad + E \left[\delta(L_i - t) \int_0^{t+\tau} M_{i+1}(t+\tau-u) dN_i(u) \right]$$

$$(4) \quad + E \left[\int_0^t \int_0^{t+\tau} M_{i+1}(t-u) M_{i+1}(t+\tau-v) dN_i(u) dN_i(v) \right]$$

$$(5) \quad - \int_0^t M_{i+1}(t-u) M_{i+1}(t+\tau-u) dF_i(u)$$

- b) $\{M_i(t, \tau) : i \in \mathbb{N}_0\}$ ist die einzige Folge von auf endlichen (t, τ) -Intervallen gleichmäßig beschränkten Funktionen, die dem System (4.9) genügt.

- c) Für $t, \tau \geq 0$, und $i \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(4.11) \quad M_i(t, \tau) = 1 + \sum_{j=i}^{\infty} F_{i,j-1}^* * (F_j - 1 + f_j(\cdot, \tau))(t).$$

Beweis von Satz 4.4 : Für Teil a schätzen wir zunächst $M_i(t, \tau)$ gleichmäßig durch eine Funktion nach oben ab, die für endliche t und τ endlich ist. Ähnlich (2.8) gilt

$$\begin{aligned}
 M_i(t, \tau) &\leq E B_i(t + \tau)^2 \\
 &\leq E \left[\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I \in J_n(i)} b_I(t + \tau) \right) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{H \in J_m(i)} b_H(t + \tau) \right) \right] \\
 (4.13) \quad &\leq 1 + 2 E B_i(t + \tau) + \sum_{n, m=1}^{\infty} \sum_{\substack{I \in J_n(i), \\ H \in J_m(i)}} E [b_I(t + \tau) \cdot b_H(t + \tau)];
 \end{aligned}$$

b_I, b_H sind die in § 2 definierten Indikatorvariablen.

$E B_i(t + \tau)$ ist nach Satz 2.1 auf endlichen (t, τ) - Intervallen gleichmäßig beschränkt.

Wegen Voraussetzung B, (2.4) und (2.5) gilt für $I = \langle i | i_1 \dots i_n \rangle \in J_n(i)$

$$(4.14) \quad \sum_{l=1}^{\infty} \tau_{i+n, l}(t) \leq \Delta(t).$$

Auf ähnliche Weise definiert man für $I, H \in J_n(i)$

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad \tau_{i+n; l, p}(s, t) &:= P(T_I^{(1)} \leq s, T_H^{(p)} \leq t) \\
 &= P(K_{i+n}(s) \geq 1, K_{i+n}(t) \geq p)
 \end{aligned}$$

und erhält dann aus B und C

$$(4.16) \quad \sum_{l, p=1}^{\infty} \tau_{i+n; l, p}(s, t) = E [K_{i+n}(s) \cdot K_{i+n}(t)] \leq \Delta_2(\max(s, t)).$$

Ist $I = \langle i | i_1 \dots i_n \rangle \in J_n(i)$ und $H = \langle i | j_1 \dots j_m \rangle \in J_m(i)$, so sind

$$T_{\langle j \rangle}^{(i_1)}, T_{\langle i | i_1 \rangle}^{(i_2)}, \dots, T_{\langle i | i_1 \dots i_{n-1} \rangle}^{(i_n)};$$

$$T_{\langle i \rangle}^{(j_1)}, T_{\langle i | j_1 \rangle}^{(j_2)}, \dots, T_{\langle i | j_1 \dots j_{m-1} \rangle}^{(j_m)}; \text{ und auch die Paare}$$

$$(T_{\langle i \rangle}^{(i_1)}, T_{\langle i \rangle}^{(j_1)}) , (T_{\langle i | i_1 \rangle}^{(i_2)}, T_{\langle i | j_1 \rangle}^{(j_2)}) , \dots$$

soweit man diese bilden kann, unabhängig.

Wir erhalten schließlich für $n \geq m$

$$(4.17) \quad E [b_I(t) \cdot b_H(t)] = \\ = \tau_{i; i_1, j_1} * \dots * \tau_{i+m; i_m, j_m} * \tau_{i+m+1, i_{m+1}} * \dots * \tau_{i+n, i_n}(t, t)$$

als Faltung von m zweidimensionalen und $n-m$ eindimensionalen Verteilungen.

Schätzt man (4.17) mit (4.14) und (4.16) ab, erhält man für die Summe auf der rechten Seite von (4.13) die Schranke

$$2 \cdot \sum_{n \geq m \geq 1} \Delta_2^{m*} \Delta^{(n-m)*}(t+\tau, t+\tau) \leq 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\max(\Delta_2(t+\tau), \Delta(t+\tau)) \right]^n$$

Mit den gleichen Überlegungen wie in Lemma 4.1 von Crump-Mode [8] erhält man, daß dieser letzte Ausdruck endlich ist. Womit die gleichmäßige Beschränktheit der $M_i(t, \tau)$ auf endlichen (t, τ) Intervallen folgt.

Nun zum Nachweis von (4.9) : Sei o.B.d.A. $i = 0$. Aus (1.2) folgt

$$(4.18) \quad M_0(t, \tau) = E E [Z_0(t) Z_0(t+\tau) / \mathcal{G}_{\varphi_{\langle 0 \rangle}}]$$

$$(1) = E [\delta(L_{\langle 0 \rangle} - t) \cdot \delta(L_{\langle 0 \rangle} - t - \tau)]$$

$$(2) + E [\delta(L_{\langle 0 \rangle} - t) \cdot \sum_{j=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t)} M_1(t + \tau - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)})]$$

$$(3) + E [\delta(L_{\langle 0 \rangle} - t - \tau) \cdot \sum_{j=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t)} M_1(t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)})]$$

$$(4) + E E \left[\sum_{j=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t)} \sum_{k=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t+\tau)} Z_1(t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)}, \omega_j) \cdot \right. \\ \left. \cdot Z_1(t + \tau - T_{\langle 0 \rangle}^{(k)}, \omega_k) / \mathcal{G}_{\varphi_{\langle 0 \rangle}} \right].$$

Man erhält (4.10) (1) - (3) sofort aus (4.18) (1) - (3).

Etwas Rechenarbeit verlangt lediglich (4.18) (4): Gegeben $G_{\rho_{\langle 0 \rangle}}$ sind $Z_1(\cdot, \omega_j)$ und $Z_1(\cdot, \omega_k)$ für $k \neq j$ unabhängige ZV, da es Größen von Populationen sind, die von verschiedenen Individuen stammen.

Folglich ist (4.18) (4) gleich

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{j=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t)} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N_{\langle 0 \rangle}(t+\tau)} M_1(t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)}) M_1(t + \tau - T_{\langle 0 \rangle}^{(k)}) \right] \\ + E \left[\sum_{j=1}^{N_{\langle 0 \rangle}(t)} M_1(t - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)}) M_1(t + \tau - T_{\langle 0 \rangle}^{(j)}) \right] \\ = E \left[\int_0^t M_1(t-u) dN_{\langle 0 \rangle}(u) \int_0^{t+\tau} M_1(t+\tau-v) dN_{\langle 0 \rangle}(v) \right] \\ - E \left[\int_0^t M_1(t-u) M_1(t-u) dN_{\langle 0 \rangle}(u) \right] \\ + E \left[\int_0^t M_1(t-u, t-u) dN_{\langle 0 \rangle}(u) \right] . \end{aligned}$$

Die beiden ersten Terme ergeben (4.10) (4) und (5), während der letzte Term den Integralterm von (4.9) ergibt. Damit ist Teil a) bewiesen.

Die Eindeigkeitsaussage in Teil b wird genau so bewiesen wie Teil b von Satz 4.3.

Zum Beweis von Teil c schätzen wir zunächst $f_i(t, \tau)$ ab:

$$\begin{aligned} f_i(t, \tau) \leq 1 + \int_0^t M_1(t-u) dF_i(u) + \int_0^{t+\tau} M_1(t+\tau-u) dF_i(u) \\ + E \left[\int_0^t M_1(t-u) dN_i(u) \cdot \int_0^{t+\tau} M_1(t+\tau-v) dN_i(v) \right] \\ \leq 1 + m(t) F_i(t) + m(t+\tau) F_i(t+\tau) \\ + m(t) m(t+\tau) E [N_i(t) N_i(t+\tau)] , \end{aligned}$$

wenn $m(t) := \sup_{0 \leq u \leq t} M_1(u)$ für $t \geq 0$ ist.

Da $F_i(t) \leq E K_i(t) \leq \Delta(t)$ und $E[N_i(t) N_i(t+\tau)] \leq \Delta_2(t+\tau)$ unabhängig von i beschränkt sind, ist auch $f_i(t, \tau)$ auf endlichen (t, τ) - Intervallen unabhängig von i beschränkt durch eine Funktion $\varphi(t, \tau)$. Folglich ist

$$1 + \sum_{j=0}^{\infty} (F_j - 1 + f_j(\cdot, \tau)) * F_{0,j-1}^*(t) \\ 1 + [\Delta(t) + \varphi(t, \tau)] \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^{j*}(t) < \infty$$

auf endlichen (t, τ) -Intervallen unabhängig von i beschränkt.

Also ist die rechte Seite von (4.11) gleichmäßig beschränkt auf endlichen (t, τ) - Intervallen. Durch Einsetzen verifiziert man sofort, daß die rechte Seite von (4.11) (4.9) erfüllt; wegen Teil b folgt dann die Behauptung c. □

Eine explizitere Darstellung der $f_i(t, \tau)$ erhält man, wenn die L_I und $\{K_I(t), t \geq 0\}$ unabhängig sind, vgl. Crump-Mode [9].

Insgesamt zeigt dieser Paragraph, daß man durch eine Kombination der bekannten Methoden für den Crump-Mode-Jagers Prozess (Crump-Mode [8],[9], Doney [11], Jagers [19]) und für den generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess von Fildes [14] Systeme von Integralgleichungen für die WEF und Momente erhalten kann.

§ 5 Grenzwertsätze im superkritischen Fall

In diesem Paragraphen soll das asymptotische Verhalten der Populationsgröße beschrieben werden, wenn die Individuen in allen Generationen im Mittel mehr als einen Nachkommen haben.

Verschwindet die Generationsabhängigkeit der mittleren Nachkommensanzahl mit wachsender Generationsnummer, d.h. $F_i(t) \rightarrow F(t)$ für $i \rightarrow \infty$, so kann man einen Malthus-Parameter α zu $F(t)$ definieren, der für das asymptotische Wachstum entscheidend ist. Weitere Voraussetzungen, die wir unten in E zusammenfassen, werden wegen der Anwendung eines allgemeinen Erneuerungssatzes von Smith, s. Anhang, benötigt; an manchen Stellen könnten sie noch etwas abgeschwächt werden.

Voraussetzung E : Sei $F(t)$ eine nicht negative, monoton wachsende, rechtsstetige und endliche Funktion auf $[0, \infty)$ mit $F_i(t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} F(t)$ für alle $t \in [0, \infty]$.

$F_i(t), F(t)$ haben positive und stetige Dichten und $F_i(\infty), F(\infty) > 1$.

Definition 5.0 : Es gelte E. Dann heißt die reelle Zahl

$$\alpha > 0 : \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} dF(u) = 1$$

Malthus-Parameter zur "Grenzverteilung" F .

Setze für $i \in \mathbb{N}_0$

$$(5.0) \quad c_i := \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} dF_i(u) \quad .$$

Dann ist unter der zusätzlichen Voraussetzung $C \quad c_i \in (0, \infty)$ ein Maß für die Abweichung von F_i von der "Grenzverteilung" F ; und

$$(5.1) \quad \Gamma_i := \prod_{k=i}^{\infty} c_k$$

ist eine Größe zur Beurteilung der Konvergenzgeschwindigkeit von F_i gegen F .

Beginnt die Population in der i -ten Generation und ist die mittlere Anzahl von Nachkommen pro Individuum stets größer 1, auch in der Grenze für $i \rightarrow \infty$, gilt mit positiver Wahrscheinlichkeit $Z_i(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Wir beginnen in 5.1 mit dem ersten Schritt zu einer geeigneten Normierung von $Z_i(t)$, indem wir $M_i(t)$ für $t \rightarrow \infty$ untersuchen.

Zunächst noch eine Bemerkung zum Malthus-Parameter und ein anschaulich einleuchtendes Ergebnis zum Verhalten der $M_i(t)$, das z.B. im Fall $\Gamma_i = \infty$ Anwendung findet, s. die Bemerkung nach Satz 5.4.

Bemerkung 5.0 : Es gelte Voraussetzung A und E. Sei für $\lambda \geq 0$

$$\mathcal{L}_i(\lambda) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} dF_i(u)$$

die Laplace-Transformierte von F_i . Da $F_i(\infty) > 1$ ist, existiert der Malthus-Parameter $\alpha_i > 0$ zur Reproduktionsfunktion F_i der i -ten Generation, gegeben durch $\mathcal{L}_i(\alpha_i) = 1$. Da $\mathcal{L}_i(\lambda)$ beschränkt ist für $\lambda \geq 0$, folgt wegen E aus dem erweiterten Stetigkeitssatz von Feller [13], S. 433, $\mathcal{L}_i(\lambda) \rightarrow \mathcal{L}(\lambda)$ für $\lambda \geq 0$ und die Stetigkeit und das monotone Fallen von $\mathcal{L}_i, \mathcal{L}$ sind dann hinreichend dafür, daß $\alpha_i \rightarrow \alpha$ für $i \rightarrow \infty$.

Satz 5.0 : Es gelten die Voraussetzungen B und es sollen Dichtefunktionen für F_j und G_j für $j \geq i$ existieren.

Dann ist $M_i(t) e^{-\alpha t}$ monoton fallend (bzw. monoton wachsend), wenn ein $\alpha \geq 0$ existiert, so daß

$$(5.2) \quad \alpha (1 - G_j(t)) \geq F'_j(t) - G'_j(t) \quad \text{für alle } j \geq i \text{ und } t \geq 0$$

(bzw. $\alpha (1 - G_j(t)) \leq F'_j(t) - G'_j(t)$).

Anschauliche Deutung :

$\theta_j(t) := G'_j(t) / (1 - G_j(t))$ ist die Mortalität oder Todesrate im Alter t in der j -ten Generation,

$b_j(t) := F'_j(t) / (1 - G_j(t))$ ist die Geburtsrate im Alter t in der j -ten Generation

(vgl. Mode [29]). Ist dann nach (5.2) für alle Generationen und für alle Alter die Geburtsrate $\leq \alpha +$ die Todesrate, $\alpha \geq 0$, so ist $M_i(t) e^{-\alpha t}$ monoton fallend und im umgekehrten Fall monoton wachsend.

Beweis von Satz 5.0 : Der Beweis erfolgt mit Hilfe approximierender Folgen für die Erwartungswerte, vgl.

Fildes [14], S. 458 und Harris [16], S. 132.

1. Sei für $t \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_0$

$$M_{i,0}(t) := 1$$

$$M_{i,n}(t) := 1 - G_i(t) + \int_0^t M_{i+1,n-1}(t-u) dF_i(u), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$v_{i,n}(t) := \exp(-\alpha t) M_{i,n}(t) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0. \quad \text{Dann ist}$$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} v_{i,0}(t) &= \exp(-\alpha t) \\ v_{i,n}(t) &= (1-G_i(t)) e^{-\alpha t} + \int_0^t v_{i+1,n-1}(t-u) e^{-\alpha u} F_i(u) du. \end{aligned}$$

Da $v_{i,0}(t)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ differenzierbar ist, folgt aus (5.3) durch Induktion nach n , daß $v_{i,n}(t)$ für alle i und für alle $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar ist. Wegen $v_{i,n}(0) = 1$ gilt dann

$$(5.4) \quad v'_{i,n}(t) = e^{-\alpha t} \left\{ \varphi_i(t) + \int_0^t v'_{i+1,n-1}(t-u) e^{-\alpha u} dF_i(u) \right\}$$

$$\text{mit} \quad \varphi_i(t) := -\alpha(1 - G_i(t)) + F'_i(t) - G'_i(t).$$

Es ist $v'_{i,0}(t) \leq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $t \geq 0$.

Sei $v'_{i,n-1}(t) \leq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $t \geq 0$. Da $F_i(t)$ monoton wächst, ist $F'_i(t) \geq 0$; $\varphi_i(t) \leq 0$ nach (5.2). Diese Eigenschaften ergeben in (5.4) $v'_{i,n}(t) \leq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $t \geq 0$.

Vollständige Induktion liefert dann: $v_{i,n}(t)$ ist monoton fallend in t für alle $i, n \in \mathbb{N}_0$.

2.] $\{M_i(t) : i \in \mathbb{N}_0\}$ erfüllt (4.6). Folglich ist

$$\begin{aligned} M_i(t) - M_{i,n}(t) &= \int_0^t (M_{i+1}(t-u) - M_{i+1,n-1}(t-u)) dF_i(u) \\ &= (M_{i+1} - M_{i+1,n-1}) * F_i(t) \\ &= (M_{i+n} - M_{i+n,0}) * F_i * \dots * F_{i+n-1}(t) \\ &\leq (M_{i+n} - 1) * \Delta^{(i+n)*}(t) \leq \eta * \Delta^{(i+n)*}(t), \end{aligned}$$

wenn $\eta(t)$ die gleichmäßige Schranke der $M_i(t)$ aus Satz 4.3 ist.

Wegen Voraussetzung B folgt $\Delta^{(i+n)*}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für alle $t \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_{i,n}(t) = M_i(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_{i,n}(t) = \exp(-\alpha t) M_i(t) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und}$$

$\exp(-\alpha t) M_i(t)$ ist monoton fallend, da $v_{i,n}(t)$ für alle n monoton fällt.

3.] Zum Beweis der umgekehrten Behauptung definiert man

$$M_{i,0}(t) := 0 \quad \text{und} \quad M_{i,n}(t) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad \text{wie in 1.}$$

Man erhält dann wieder (5.4). Jetzt ist $\varphi_i(t) \geq 0$ und

$v_{i,0}(t) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $t \geq 0$. Durch Induktion erhält man: $v_{i,n}(t)$ ist monoton wachsend für alle i und n aus $\mathbb{N}_0$.

Teil 2 gilt dann entsprechend. □

Der vorstehende Beweis von Satz 5.0 vervollständigt und verallgemeinert die Beweisskizze von Lemma 2.8 von Fildes [14]. Ein dort angegebenes Vergleichslemma für die Erwartungswerte läßt sich auf unseren Fall verallgemeinern, ist hier aber kaum von Bedeutung.

In den folgenden Abschnitten bekommen wir durch konsequentes Ausnutzen und Verfeinern der Methoden von Fildes [14] die ersten beiden Momente so in den Griff, daß die L_2 -Konvergenz der Populationsgröße $Z_i(t)$ in 5.3 eine einfache Folgerung wird.

5.1 Asymptotisches Verhalten der Momente falls Γ_i konvergiert

Satz 5.1 : Es gelten die Voraussetzungen B, C, E und es sei $\Gamma_i < \infty$.

Wenn $U_i(t) := \exp(-\alpha t) \sum_{j=i+1}^{\infty} F_{i,j-1}^* * G_j(t)$ für $t \rightarrow \infty$

gegen eine reelle Zahl γ_i konvergiert, dann gilt

$$(5.5) \quad M_i(t) e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\Gamma_i}{\alpha \tilde{c}} - \gamma_i$$

mit $\tilde{c} := \int_0^{\infty} t \exp(-\alpha t) dF(t)$.

Zunächst einige Bezeichnungen und Vorbemerkungen :

Sei für $i \in \mathbb{N}_0$ $\tilde{X}_i$ eine ZV mit der VF $\tilde{F}_i$, wobei

$$(5.6) \quad \tilde{F}_i(t) := c_i^{-1} \int_0^t e^{-\alpha u} dF_i(u), \quad t \geq 0$$

eine mögliche Normierung ist, die die Reproduktionsfunktionen zu echten VF mit $\tilde{F}_i(\infty) = 1$ macht. Setzen wir für $i \in \mathbb{N}_0, t \geq 0$

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \tilde{F}_{i,i-1}^*(t) &:= 1, \\ \tilde{F}_{i,i+n}^*(t) &:= \tilde{F}_i * \dots * \tilde{F}_{i+n}(t) \quad \text{für } n \geq i, \end{aligned}$$

gilt für $j \geq i, t \geq 0$

$$(5.8) \quad \tilde{F}_{i,j}^*(t) = (\Gamma_{i,j})^{-1} \int_0^t e^{-\alpha u} dF_{i,j}^*(u), \quad \text{mit}$$

$$(5.9) \quad \Gamma_{i,j} := \prod_{k=i}^j c_k.$$

Beweis von (5.8) : Für die Laplace-Transformierten gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tilde{F}_k)(s) &:= \int_0^\infty e^{-su} d\tilde{F}_k(u) = \int_0^\infty e^{-su} c_k^{-1} e^{-\alpha u} dF_k(u) \\ &= c_k^{-1} \mathcal{L}(F_k)(s + \alpha)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\tilde{F}_{i,j}^*)(s) = \left(\prod_{k=i}^j c_k\right)^{-1} \mathcal{L}(F_{i,j}^*)(s + \alpha)$$

$$\Rightarrow d\tilde{F}_{i,j}^*(t) = \left(\prod_{k=i}^j c_k\right)^{-1} e^{-\alpha t} dF_{i,j}^*(t) \Rightarrow (5.8).$$

Definieren wir außerdem für $i \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$

$$(5.10) \quad H_i(t) := \sum_{j=i}^\infty F_{i,j}^*(t),$$

$$(5.11) \quad \tilde{H}_i(t) := \sum_{j=i}^\infty \Gamma_{i,j} \tilde{F}_{i,j}^*(t),$$

erhalten wir aus (5.8)

$$\begin{aligned}(5.12) \quad \int_0^t e^{-\alpha u} dH_i(u) &= \sum_{j=i}^\infty \int_0^t e^{-\alpha u} dF_{i,j}^*(u) \\ &= \sum_{j=i}^\infty \Gamma_{i,j} \tilde{F}_{i,j}^*(t) = \tilde{H}_i(t).\end{aligned}$$

Nun zum Beweis von Satz 5.1 :

1. Aus (4.7) folgt

$$\begin{aligned}(5.13) \quad M_i(t) e^{-\alpha t} &= (1 + F_i(t) - G_i(t)) e^{-\alpha t} \\ &\quad - e^{-\alpha t} \sum_{j=i+1}^\infty F_{i,j-1}^* * G_j(t) \\ &\quad + e^{-\alpha t} F_i^* H_{i+1}(t).\end{aligned}$$

Da $\alpha > 0$ und $F_i(\infty) \leq m$, geht der erste Term in (5.13) gegen 0 und der zweite nach Voraussetzung gegen 0 für $t \rightarrow \infty$.

Deswegen ist nur noch das asymptotische Verhalten von

$$(5.14) \quad e^{-\alpha t} F_i^* H_{i+1}(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} F_i(t-u) e^{-\alpha u} dH_{i+1}(u)$$

$$= \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} F_i(t-u) d\tilde{H}_{i+1}(u) \text{ zu untersuchen.}$$

2.] Mit Theorem 9 von Smith [35] s. Anhang, einem recht allgemeinen Erneuerungssatz für eine Folge von unabhängigen, aber nicht notwendig identisch verteilten ZV, kann man zeigen, daß die rechte Seite von (5.14) für $t \rightarrow \infty$ gegen $\Gamma_i / (\alpha \tilde{\mu})$ konvergiert.

Für die Folge $\{\tilde{X}_k : k = i+1, \dots\}$ von unabhängigen ZV, für die reelle Zahlenfolge $\{\Gamma_{i+1,j} : j = i+1, \dots\}$, für die verallgemeinerte Erneuerungsfunktion $\tilde{H}_{i+1}(t)$ und für die Funktion

$$k(t) := \begin{cases} \exp(-\alpha t) F_i(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

folgt dann aus diesem Theorem 9 von Smith, s. Anhang,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} F_i(t-u) d\tilde{H}_{i+1}(u) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\Gamma_{i+1}}{\tilde{\mu}} \int_0^\infty e^{-\alpha t} F_i(t) dt \\ &= \Gamma_i / (\alpha \tilde{\mu}), \end{aligned}$$

wenn die Voraussetzungen a) - d) dieses Erneuerungssatzes erfüllt sind:

Zum Nachweis von Voraussetzung a) beachten wir, daß aus $\Gamma_i < \infty$

$c_j \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} 1$ folgt, $t e^{-\alpha t}$ eine auf $[0, \infty)$ beschränkte Funktion

ist und nach Voraussetzung $E F_j(t) \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} F(t)$ für alle

$t \in [0, \infty]$ gilt. Ein Satz von Helly-Bray, liefert dann

$$E \tilde{X}_j = c_j^{-1} \int_0^\infty t e^{-\alpha t} dF_j(t) \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \int_0^\infty t e^{-\alpha t} dF(t) = \tilde{\mu}.$$

Weiter existieren Zahlen $0 \leq M_1, M_2 < \infty$:

$$E \tilde{X}_j^2 = c_j^{-1} \int_0^\infty t^2 e^{-\alpha t} dF_j(t) \leq M_1 F_j(\infty) \leq M_2.$$

Somit sind die Voraussetzungen des hinreichenden Kriteriums im Anhang mit $G(x) = x^2$ erfüllt und die Folge $\{\tilde{X}_j : j = i+1, \dots\}$ ist stochastisch stabil mit Mittel $\tilde{\mu} \implies$ Voraussetzung a).

Voraussetzung b) ist erfüllt, da die VF $F_j(t), F(t)$ wegen Voraussetzung E stetige und positive Dichten besitzen und somit $\{\tilde{X}_j\}$ eine brave Erneuerungsfolge ist (vgl. Fildes [14] S. 462).

Voraussetzung c) ist erfüllt, da $\int_{i+1,j}$ für $j \rightarrow \infty$ gegen $\int_{i+1}$ konvergiert.

Zu Voraussetzung d) ist nur zu bemerken, daß

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} F_j(t) dt \text{ existiert.}$$



Wichtig für die zweiten Momente ist das folgende

Lemma 5.1 : Es gelten die Voraussetzungen B, C, E und $\int_0^\infty < \infty$.

Dann gibt es eine reelle Zahl $C \in [0, \infty)$, so daß

$$M_i(t) e^{-\alpha t} \leq C \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t \geq 0.$$

Beweis : Wegen Voraussetzung C ist

$$(1 + F_i(t) - G_i(t)) e^{-\alpha t} \leq 1 + m \quad \text{und}$$

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-u)} F_i(t-u) d\tilde{H}_{i+1}(u) \leq m \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{H}_{i+1}(u)$$

für $i \in \mathbb{N}_0$ und $t \geq 0$. Damit folgt aus (5.13)

$$M_i(t) e^{-\alpha t} \leq (1 + m) + m \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{H}_{i+1}(u).$$

Für $t \geq 1$ kann die Beweisidee von Fildes [14], Lemma 3.3 übernommen werden. Es ist

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{H}_{i+1}(u) = \int_0^t e^{-\alpha u} [-d\tilde{H}_{i+1}(t-u)] \\ \leq \sum_{n=0}^{N-1} e^{-nh} [\tilde{H}_{i+1}(t-nh) - \tilde{H}_{i+1}(t-(n+1)h)],$$

wenn man $[0, t]$ in N Teilintervalle der Länge $h \in (0, 1)$ zerlegt.

Wenden wir einen Blackwellschen Erneuerungssatz von Fildes [14], Theorem 4.5, auf $\tilde{H}_{i+1}(t)$ an, erhalten wir

$$\tilde{H}_{i+1}(t+h) - \tilde{H}_{i+1}(t) \leq C(h)$$

mit einer nur noch von h aber nicht mehr von t und i abhängenden Konstanten $C(h)$. Damit wird

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{H}_{i+1}(u) \leq C(h) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-nh} < C(h) \{1 - e^{-h}\}^{-1} = \tilde{C}.$$

Für $0 \leq t \leq 1$ ist nach Satz 4.3 a) $M_i(t)$ gleichmäßig beschränkt und folglich auch $M_i(t) \exp(-\alpha t)$.

Kombiniert man beide Fälle, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.1 :

a) Für $i \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$ ist nach dem obenstehenden Beweis von Lemma 5.1

$$U_i(t) \leq e^{-\alpha t} \sum_{j=i+1}^{\infty} F_{i,j-1}^*(t) \leq C_1 < \infty,$$

mit einer von i und t unabhängigen Zahl C_1 .

b) Wir wissen vorerst nur, daß in Satz 5.1

$$b_i := \Gamma_i / (\alpha \tilde{c}_i) - \gamma_i > 0 \text{ ist.}$$

Vermutlich ist b_i für die meisten Folgen $\{L_k, K_k(t)\}$ positiv. Solange diese Frage nicht geklärt ist, bleibt die Möglichkeit offen, daß für

für $t \rightarrow \infty$ $M_i(t)$ schneller gegen ∞ geht als $\exp(\alpha t)$. Für generationsabhängige Bellman-Harris Prozesse ist $b_i > 0$, s. 6.3.

c) Man sieht in Teil 2 des Beweises von Satz 5.1, daß man in Voraussetzung E die Forderung nach stetigen und positiven Dichten soweit abschwächen kann, daß gerade noch Voraussetzung b) von Theorem 9 von Smith [35] gilt. Geht man von der Forderung $F_i(t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} F(t)$ für alle $t \in [0, \infty]$ zu der schwächeren Voraussetzung a) von Theorem 9 über, bekommt man Schwierigkeiten bei der Bestimmung des Malthus-Parameters.

Die Forderung $F_k(\infty) > 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ in E läßt sich abschwächen zu $F_k(\infty) > 1$ für fast alle k . Denn aus $0 < F_k(\infty) \leq 1$ folgt $0 < c_k \leq 1$ und solche Faktoren ändern in unseren Überlegungen nichts Grundsätzliches. Unter dieser etwas allgemeineren Form von E kann man auch die Abschnitte 5.2 und 5.3 behandeln.

Zur Behandlung der zweiten Momente führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: $i \in \mathbb{N}_0$, $j \geq i$, $t \geq 0$,

$$(5.15) \quad \bar{c}_i := \int_0^\infty \exp(-2\alpha u) dF_i(u),$$

$$\bar{F}_i(t) := \bar{c}_i^{-1} \int_0^t \exp(-2\alpha u) dF_i(u),$$

$$\bar{F}_{i,j}^*(t) := \bar{F}_i * \dots * \bar{F}_j(t),$$

$$\bar{F}_{i,i-1}^*(t) := 1,$$

$$\bar{\Gamma}_{i,j} := \prod_{k=i}^{j-1} \bar{c}_k \quad (\bar{\Gamma}_{i,i} = 1!),$$

$$A_i := E \left(\int_0^\infty \exp(-\alpha u) dN_i(u) \right)^2 - \bar{c}_i.$$

Satz 5.2 : Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.1 gelte

$$D \text{ und } E N_i^2 \leq m_2 < \infty \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt für $i \in \mathbb{N}_0$, $t, \tau \gg 0$

$$(5.16) \quad M_i(t, \tau) e^{-2\alpha t - \alpha \tau} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_{j=i}^{\infty} \bar{\Gamma}_{i,j} b_{j+1}^2 A_j$$

mit $b_k := \Gamma_k / (\alpha \bar{c}_k) - \gamma_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis :

1. Setzt man für $i \in \mathbb{N}_0$, $t, \tau \gg 0$

$$(5.17) \quad K_i(t, \tau) := M_i(t, \tau) \exp(-2\alpha t - \alpha \tau),$$

$$\bar{F}_i(t, \tau) := f_i(t, \tau) \exp(-2\alpha t - \alpha \tau),$$

so folgt aus (4.9)

$$(5.18) \quad K_i(t, \tau) = \bar{F}_i(t, \tau) + \bar{c}_i \int_0^t K_{i+1}(t-u, \tau) d\bar{F}_i(u).$$

Zunächst beweisen wir die Behauptung

$$(5.19) \quad \bar{F}_i(t, \tau) \text{ ist gleichmäßig beschränkt für alle } i, t, \tau.$$

Beweis von (5.19) : Es ist für $i \in \mathbb{N}_0$, $t \gg 0$, $\tau \gg 0$

$$\begin{aligned} (5.20) \quad & e^{-2\alpha t - \alpha \tau} \int_0^t M_{i+1}(t-u) dF_i(u) \\ &= e^{-\alpha t - \alpha \tau} \int_0^t M_{i+1}(t-u) e^{-\alpha(t-u)} e^{-\alpha u} dF_i(u) \\ &\leq e^{-\alpha t - \alpha \tau} C \int_0^t e^{-\alpha u} dF_i(u) \\ &\leq e^{-\alpha t - \alpha \tau} C c_i \leq \text{Konstant}, \end{aligned}$$

nach Lemma 5.1 und da die Folge $\{c_i\}$ nach Voraussetzung C gleichmäßig beschränkt ist. Genauso findet man

$$(5.21) \quad e^{-2\alpha t - \alpha \tau} \int_0^{t+\tau} M_{i+1}(t+\tau-u) dF_i(u) \leq \text{Konstant}.$$

Mit der Voraussetzung $E N_i^2 \leq m_2$ und Lemma 5.1 erhält man

$$\begin{aligned}
 (5.22) \quad & e^{-2\alpha t - \alpha\tau} E \left[\int_0^t \int_0^{t+\tau} M_{i+1}(t-u) M_{i+1}(t+\tau-v) dN_i(u) dN_i(v) \right] \\
 & \leq C^2 E \left[\int_0^t \int_0^{t+\tau} e^{-\alpha u} dN_i(u) e^{-\alpha v} dN_i(v) \right] \\
 & \leq \text{Konstant} \quad \text{für alle } i, t, \tau.
 \end{aligned}$$

Wendet man die Ergebnisse (5.20) - (5.22) zur Abschätzung von $\bar{f}_i(t, \tau)$ an, folgt die Behauptung (5.19).

2.] Für festes τ bestimmen wir nun $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{f}_i(t, \tau)$:

Nach Satz 5.1 ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_{i+1}(t) e^{-\alpha t} = \lim_{t \rightarrow \infty} M_{i+1}(t+\tau) e^{-\alpha(t+\tau)} = b_{i+1}.$$

Mit Lemma 5.1 und dem Satz über dominierte Konvergenz folgt, daß die beiden ersten Terme von $\bar{f}_i(t, \tau)$ wegen $\exp(-\alpha t)$ - Faktoren für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen und daß

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{f}_i(t, \tau) &= b_{i+1}^2 E \left(\int_0^\infty \exp(-\alpha u) dN_i(u) \right)^2 \\
 &\quad - b_{i+1}^2 \int_0^\infty \exp(-\alpha u) dF_i(u) \\
 &= b_{i+1}^2 A_i \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

3.] Behauptung : $\sum_{j=i+1}^\infty \bar{F}_{i,j} (\bar{f}_j(\cdot, \cdot) * \bar{F}_{i,j-1}^*) (t)$

ist gleichmäßig beschränkt für alle i, t, τ .

Beweis : Mit (5.6), $\tilde{F}(t) = \int_0^t \exp(-\alpha u) dF(u)$ und Voraussetzung E folgt

$$\bar{c}_k = c_k \int_0^\infty \exp(-\alpha u) d\tilde{F}_k(u) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \exp(-\alpha u) d\tilde{F}(u) < 1.$$

Also existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $k \gg k_0$ $\int_0^\infty e^{-\alpha u} d\tilde{F}_k(u) \leq \beta < 1$.

Wegen $\bar{\Gamma}_i = \prod_{k=i}^\infty c_k < \infty$ folgt dann für $j \gg i$ $\bar{\Gamma}_{i,j}$

$$\bar{\Gamma}_{i,j} \leq \left(\prod_{k=i}^{j-1} c_k \right) \cdot \text{Konstant} \cdot \beta^{j-i} \leq \text{Konstant} \cdot \beta^{j-i}.$$

mit Konstanten, die nicht mehr von i und j abhängen.

$$\Rightarrow \sum_{j=i+1}^\infty \bar{\Gamma}_{i,j} \leq \text{Konstant} \sum_{j=i+1}^\infty \beta^{j-i} = \text{Konstant} < \infty.$$

Da $\bar{F}_i(t)$ Verteilungsfunktionen und $\bar{F}_j(t, \tau)$ gleichmäßig beschränkt sind für alle i, t, τ , folgt die Behauptung.

4. Durch Einsetzen in (5.18) und Teil 1 und Teil 3 folgt sofort, daß

$$(5.23) \quad \bar{F}_i(t, \tau) + \sum_{j=i+1}^\infty \bar{\Gamma}_{i,j} (\bar{F}_j(\cdot, \tau) * \bar{F}_{i,j-1}^*) (t)$$

eine auf endlichen (t, τ) -Intervallen gleichmäßig beschränkte Lösungsfolge ist. Da nach Satz 4.4 das System (5.18) genau eine auf endlichen (t, τ) -Intervallen gleichmäßig beschränkte Lösung hat, ist $K_i(t, \tau)$ gleich der Funktion in (5.23).

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz aus Teil 3 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} M_i(t, \tau) \exp(-2\alpha t - \alpha \tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} K_i(t, \tau) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}_i(t, \tau) + \sum_{j=i+1}^\infty \bar{\Gamma}_{i,j} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}_j(\cdot, \tau) * \bar{F}_{i,j-1}^* (t). \end{aligned}$$

Nach Teil 2 ist der erste Grenzwert gleich $b_{i+1}^2 A_i$; nach Lemma 1 von Smith [34] ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}_j * \bar{F}_{i,j-1}^* = b_{j+1}^2 A_j$ und es folgt daraus die Behauptung (5.16).



5.2 Asymptotisches Verhalten der Momente falls Γ_i divergiert

Es zeigt sich, daß für divergentes Γ_i die Methoden von Fildes [14] für den generationsabhängigen Crump-Mode-Jagers Prozess verallgemeinert werden können und man entsprechende Sätze erhält.

Wir geben im folgenden diese Ergebnisse an und zeigen, wie sie aus der Methode von Fildes [14], S. 465-473 gefolgert werden können.

Die dort gegebenen Beweise sollen hier nicht wiederholt werden.

Sei in 5.2 Γ das Symbol für die Gamma-Funktion und $L(x)$ eine langsam variierende Funktion im Sinne von Feller [13], Kap VIII.

Satz 5.3 : Es sei B, C, E vorausgesetzt und Γ_i divergiert so, daß

$$\sum_{j=i+1}^{i+N} \Gamma_{i+1,j} \sim \frac{\beta_{i+1} L(N) N^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} \quad \text{für } N \rightarrow \infty,$$

mit $\beta_i, \gamma > 0$, L langsam variierend.

$$\text{Wenn } \bar{U}_i(t) := \left(T^\gamma L(T) \right)^{-1} \int_0^T \left(\sum_{j=i+1}^{\infty} \Gamma_{i,j-1} \int_0^t G_j(t-u) \exp(-\alpha(t-u)) d\tilde{F}_{i,j-1}^*(u) \right) dt$$

für $t \rightarrow \infty$ gegen eine reelle Zahl $K_i < \infty$ konvergiert, gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(T^\gamma L(T) \right)^{-1} \int_0^T M_i(t) e^{-\alpha t} dt = B_i - K_i$$

$$\text{mit } B_i := \beta_{i+1} c_i / \left(\Gamma(1+\gamma) \alpha \tilde{c} \right).$$

Beweis : Die grundlegende Gleichung ist wieder (4.7) aus Satz 4.3, die man wie in (5.13) und (5.14) umformt zu

$$(5.24) \quad M_i(t) e^{-\alpha t} = (1 + F_i(t) - G_i(t)) e^{-\alpha t} - \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_0^t G_j(t-u) e^{-\alpha(t-u)} e^{-\alpha u} dF_{i,j-1}^*(u) + \int_0^t F_i(t-u) e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{H}_{i+1}(u).$$

1.] Behauptung: Für $\gamma > 0$ gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T^\gamma L(T))^{-1} \int_0^T (1 + F_i(t) - G_i(t)) e^{-\alpha t} dt = 0.$$

Beweis: Das Integral ist wegen Voraussetzung C für alle T durch eine reelle Konstante C_1 beschränkt. Da L langsam variiert, gilt für genügend große T $L(T) > T^{-\varepsilon}$ für ein ε mit $0 < \varepsilon < \gamma$ und folglich gilt auch $T^\gamma L(T) \rightarrow \infty$ für $T \rightarrow \infty$.

2.] Behauptung: $\tilde{H}_{i+1}(t) \sim (\tilde{P}_{i+1} L(t) t^\gamma) / (\Gamma(1+\gamma) \tilde{\mu}^\gamma)$
für $t \rightarrow \infty$.

Beweis: Nach (5.11) ist $\tilde{H}_{i+1}(t) = \sum_{j=i+1}^{\infty} \Gamma_{i+1,j} \tilde{F}_{i+1,j}^*(t)$

und $\tilde{F}_{i+1,j}^*$ ist die VF von $\tilde{X}_{i+1} + \dots + \tilde{X}_j$ wenn

$\{\tilde{X}_j : j=i+1, \dots\}$ die Folge von unabhängigen und nicht negativen ZV mit den VF $\{\tilde{F}_j : j=i+1, \dots\}$ ist.

Die Behauptung folgt aus Theorem 1 von Smith [36], wenn man gezeigt hat, daß die Folge $\{\tilde{X}_j\}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen mit dem Mittelwert $\tilde{\mu}$ genügt:

$$\text{Es ist für } 0 < \delta \leq \alpha \quad E e^{\delta \tilde{X}_j} \leq E e^{\alpha \tilde{X}_j} = \int_0^t e^{\alpha t} d\tilde{F}_j(t)$$

$= c_j^{-1} \int_0^{\infty} dF_j(t) = c_j^{-1} F_j(\infty) < \text{Konstant für alle } j \gg i+1,$
 da $0 < c_j < \infty$ und $c_j \rightarrow 1$ für $j \rightarrow \infty$. $\tilde{X}_j$ sind positive ZV;
 die Erwartungswerte $E \tilde{X}_j = c_j^{-1} \int_0^{\infty} t e^{-\alpha t} dF_j(t)$ sind endlich
 und konvergieren gegen $\tilde{\alpha} = \int_0^{\infty} t \exp(-\alpha t) dF(t)$ für $j \rightarrow \infty$.
 Somit hat die Folge $\{\tilde{X}_j\}$ alle nötigen Eigenschaften für das Korollar von Fildes [14], S.466. Wie bei diesem Korollar erhält man
 dann, daß $\{\tilde{X}_j\}$ das schwache Gesetz der großen Zahlen erfüllt.

3.] Behauptung: $\lim_{T \rightarrow \infty} (T^{\gamma} L(T))^{-1} \int_0^T \left(\int_0^t F_i(t-u) e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{H}_{i+1}(u) \right) dt$
 $= B_i.$

Beweis: Wie bei Fildes [14], S.467, zeigt man, daß das Doppelintegral sich asymptotisch für $T \rightarrow \infty$ wie

$$\tilde{H}_{i+1}(T) \int_0^{\infty} F_i(t) e^{-\alpha t} dt = \tilde{H}_{i+1}(T) c_i \alpha^{-1} \text{ verhält. Daraus}$$

folgt dann mit 2. die Behauptung.

Wendet man die Voraussetzung des Satzes auf den 2. Term in (5.24),
 die 1. Beh. auf den 1. und die 3. Beh. auf den 3. Term in (5.24) an,
 so ist der Beweis von Satz 5.3 vollständig. □

Satz 5.4: Unter den Voraussetzungen B und

- (i) es gibt $t_0, \delta > 0$: $M_i(t) \exp(-\alpha t) t^{\delta}$ für $t \gg t_0$
monoton wächst,
 - (ii) es gibt $\gamma, D > 0$: $\int_0^t M_i(u) e^{-\alpha u} du \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} D t^{\gamma} L(t),$
- gilt $M_i(t) e^{-\alpha t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} D \gamma t^{\gamma-1} L(t)$ für $t \rightarrow \infty$.

Beweis : Identisch mit dem Beweis von Theorem 4.4 von Fildes [14] .

Bemerkung 5.2 : a) Voraussetzung (ii) ist erfüllt, wenn Satz 5.3 gilt.

Voraussetzung (i) ist z. B. für jedes positive δ erfüllt, wenn außer $B \alpha(1-G_j(t)) \leq F_j'(t) - G_j'(t)$ für alle $j \geq i, t \geq 0$ und ein $\alpha \gg 0$ gilt, da dann nach Satz 5.0 schon $M_i(t) e^{-\alpha t}$ monoton wächst.

b) In Satz 5.3 bleibt ähnlich wie in Satz 5.1 die Frage offen, ob stets $B_i - K_i > 0$ ist.

Satz 5.5 : Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.3 mit $L \equiv 1$.

Zusätzlich gelte D und $E N_i(\infty)^2 \leq m_2 < \infty$ für $i \in \mathbb{N}_0$

und (i) es gibt ein $\gamma \gg 1, 0 \leq C < \infty$, so daß für alle $i \in \mathbb{N}_0$

$$\bar{\Gamma}_{i,i+n-1} \leq C n^{\gamma-1};$$

(ii) $M_i(t) t \exp(-\alpha t)$ ist monoton wachsend.

Dann gilt

$$\frac{M_i(t, \tau) \exp(-2\alpha t - \alpha \tau)}{t^{\gamma-1} (t + \tau)^{\gamma-1}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_{j=i}^{\infty} \gamma^2 \bar{\Gamma}_{i,j} (B_{j+1} - K_{j+1})^2 A_j.$$

Beweis : Zunächst ein Lemma 5.1 entsprechendes Ergebnis :

1. Behauptung : Es gibt eine Konstante $D : M_i(t) e^{-\alpha t} \leq D(t^{\gamma-1} + 1)$.

Beweis : Auf die Folge $\{\tilde{X}_j\}$ kann man Theorem 4.5 von Fildes [14] anwenden und erhält daraus mit $\gamma \gg 1$ und $C(h)$ unabhängig von t und i

$$\tilde{H}_{i+1}(t+h) - \tilde{H}_{i+1}(t) \leq C(h) (t+h)^{\gamma-1}.$$

Mit diesem Hilfsmittel

folgt diese Behauptung dann analog Lemma 5.1 .

2.] Behauptung: $\bar{f}_i(t, \tau) / (t^{\gamma-1} (t+\tau)^{\gamma-1})$ ist gleichmäßig beschränkt für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $t > 0$, $\tau > 0$.

Beweis: Mit der vorstehenden 1. Behauptung läßt sich der entsprechende Beweis von Teil 1 von Satz 5.2 übertragen.

3.] Behauptung: Für festes τ ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{f}_i(t, \tau) / (t^{\gamma-1} (t+\tau)^{\gamma-1}) = (B_{i+1} - \kappa_{i+1})^2 \gamma^2 A_i$,

Beweis: Es ist klar, daß

$$(5.25) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{f}_i(t, \tau) / [t^{\gamma-1} (t+\tau)^{\gamma-1}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-2\alpha t - \alpha \tau} / t^{\gamma-1} (t+\tau)^{\gamma-1} \right] \left\{ E \left[\int_0^t \int_0^{t+\tau} M_{i+1}(t-u) M_{i+1}(t+\tau-v) dN_i(u) dN_i(v) \right] - \int_0^t M_{i+1}(t-u) M_{i+1}(t+\tau-u) dF_i(u) \right\},$$

da die anderen Terme wegen $\exp(-\alpha t)$ - Faktoren für $t \rightarrow \infty$ gegen

0 gehen. Den Grenzwert (5.25) berechnet man mit Lemma 1 von Durham [12].

Da nach Satz 5.4 $M_{i+1}(t) \exp(-\alpha t) t^{-(\gamma-1)}$ und auch

$M_{i+1}(t+\tau) \exp(-(t+\tau)) (t+\tau)^{-(\gamma-1)}$ für $t \rightarrow \infty$ gegen

$B_{i+1} - \kappa_{i+1}$ konvergieren, ist dieser Grenzwert (5.25) dann gleich

$$(B_{i+1} - \kappa_{i+1})^2 \gamma^2 \cdot \left[E \left(\int_0^\infty e^{-\alpha u} dN_i(u) \right)^2 - \int_0^\infty e^{-2\alpha u} dF_i(u) \right].$$

4.] Wie in Teil 3 des Beweises von Satz 5.2 zeigt man, daß

$$\sum_{j=i}^{\infty} \bar{f}_{i,j} < \infty. \text{ Folglich ist wegen der Behauptung in 2. für } t > 0$$

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} \bar{\Gamma}_{i,j} \left[t^{\gamma-1} (t+\tau)^{\gamma-1} \right]^{-1} (f_j(\cdot, \tau) * F_{i,j-1}^*)(t)$$

gleichmäßig konvergent und strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} \bar{\Gamma}_{i,j} (B_{j+1} - K_{j+1})^2 \gamma^2 A_j.$$

5. Bezeichnet man (5.23) mit $Q_i(t, \tau)$, so ist nach 3. und 4.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_i(t, \tau) e^{-2\alpha t - \alpha \tau}}{t^{\gamma-1} (t+\tau)^{\gamma-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Q_i(t, \tau)}{t^{\gamma-1} (t+\tau)^{\gamma-1}}$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \bar{\Gamma}_{i,j} (B_{j+1} - K_{j+1})^2 \gamma^2 A_j.$$



5.3 Konvergenz im quadratischen Mittel der normierten Populationsgröße

Beim superkritischen Bellman-Harris Prozess konvergiert die normierte Populationsgröße $W(t) := Z(t) / n_1 \exp(\alpha t)$ mit $W \geq 1$ gegen eine nicht ausgeartete ZV W und, falls die Anzahl der Nachkommen N eines Individuums die Bedingung $E N \log N < \infty$ erfüllt, weiß man noch einiges mehr über die Verteilung von W , s. Athreya-Ney [2]. Diese Ergebnisse lassen sich im wesentlichen auf den superkritischen Crump-Mode-Jagers Prozess verallgemeinern, s. Crump-Mode [8], [9], Doney [11], Jagers [19]; allerdings gibt es dann auch Fälle mit $W = 0$ f.s. .

Für den Bellman-Harris Prozess mit generationsabhängigen Lebensdauern bekommt Fildes [14] noch Konvergenz im quadratischen Mittel bei geeignet normierter Populationsgröße. Dies läßt sich auf unseren Fall übertragen.

Man beachte, daß im folgenden Satz die Grenzvariable W_i nicht wie üblich auf Erwartungswert 1 normiert ist, da wir nur $E W_i \gg 0$ haben.

Satz 5.6 : Für $i \in \mathbb{N}_0$ gilt

(a) Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2 gilt

$$W_i(t) := Z_i(t) \exp(-\alpha t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_2} W_i$$

und W_i ist eine nicht negative ZV mit $E W_i = b_i$

$$\text{und } \text{Var } W_i = \sum_{j=i}^{\infty} \bar{\Gamma}_{i,j} b_{j+1}^2 A_j - b_i^2 \gg 0$$

(b) Unter den Voraussetzungen von Satz 5.5 gilt

$$W_i(t) := Z_i(t) / (\gamma t^{\gamma-1} \exp(\alpha t))^{-1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_2} W_i$$

und W_i ist eine nicht negative ZV mit $E W_i = B_i - K_i$

$$\text{und Var } W_i = \sum_{j=i}^{\infty} (B_{j+1} - K_{j+1})^2 A_j \gamma^2 \bar{\Gamma}_{i,j} - (B_i - K_i)^2 \geq 0$$

Beweis : Der Beweis von (a) ist eine direkte Anwendung von Satz 5.2:

$$\begin{aligned} E [W_i(t+\tau) - W_i(t)]^2 &= E W_i(t+\tau)^2 + E W_i(t)^2 - 2 E W_i(t+\tau) W_i(t) \\ &= e^{-2\alpha(t+\tau)} M_i(t+\tau, 0) + e^{-2\alpha t} M_i(t, 0) - 2 e^{-2\alpha t - \alpha \tau} M_i(t, \tau) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig für } \tau \geq 0 \text{ nach Satz 5.2.}$$

Folglich konvergiert $W_i(t)$ im quadratischen Mittel gegen eine ZV W_i ,

die wegen $W_i(t) \geq 0$ nicht negativ ist. Nach Satz 5.1 ist $E W_i = b_i$

$$\begin{aligned} \text{und Var } W_i &= \lim_{t \rightarrow \infty} \{ E W_i(t)^2 - (E W_i(t))^2 \} \\ &= \sum_{j=i}^{\infty} \bar{\Gamma}_{i,j} b_{j+1}^2 A_j - b_i^2. \end{aligned}$$

(b) wird unter Benutzung von Satz 5.5 genauso bewiesen. □

Für die Folge $\{W_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ erhält man leicht ein System von Funktionalgleichungen für ihre momentenerzeugenden Funktionen.

Sei $\phi_i(p) := E \exp(-p W_i)$ für $i \in \mathbb{N}_0$, $p \geq 0$.

Dann gilt mit $H_{i,y}$ aus Definition 4.2

Korollar zu Satz 5.6 : Unter den Voraussetzungen von Satz 5.6 und mit

$$a(t) := \begin{cases} \exp(-\alpha t) & \text{für 5.6 (a) für } t \geq 0 \text{ und für 5.6 (b)} \\ & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (t^{\gamma-1})^{-1} \exp(-\alpha t) & \text{für 5.6 (b) für } t \gg 1 \end{cases}$$

ist die Folge $\{\phi_i(p) : i \in \mathbb{N}_0\}$ Lösung von

$$(5.26) \quad \phi_i(p) = \int_0^{\infty} H_{i,y}(\phi_{i+1}(p a(\cdot))) dG_i(y), \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Für 5.6 (a) ist $\{\phi_i(p) : i \in \mathbb{N}_0\}$ unter den beschränkten Funktionen, deren rechtsseitige Ableitung in 0 gleich $-E W_i$ ist, die einzige Lösung von (5.26).

Beweis : Setze für $i \in \mathbb{N}_0, p, t \geq 0$ mit $W_i(t) = a(t) Z_i(t)$

$$\Psi_i(p, t) := E \exp(-p W_i(t)) = F_i(\exp(-p a(t)), t).$$

$$\Rightarrow F_i(\exp(-p a(t)), t-u) = \Psi_i(p a(t)/a(t-u), t-u), \quad 0 \leq u \leq t.$$

Aus Satz 4.1 folgt für $i \in \mathbb{N}_0, p, t \geq 0$

$$(5.27) \quad \begin{aligned} \Psi_i(p, t) &= \int_0^t H_{i,y}(\hat{F}_{i+1}(\exp(-p a(t)), t-)) dG_i(y) \\ &\quad + \exp(-p a(t)) \int_t^{\infty} H_{i,y}(\hat{F}_{i+1}(\exp(-p a(t)), t-)) dG_i(y). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$(5.28) \quad \begin{aligned} H_{i,y}(\hat{F}_{i+1}(\exp(-p a(t)), t-)) &= \\ &= E \left[\exp \left(\int_0^t \log F_{i+1}(\exp(-p a(t)), t-u) dN_i(u) \right) / L_i = y \right] \\ &= E \left[\exp \left(\int_0^t \log \Psi_{i+1}(p a(t)/a(t-u), t-u) dN_i(u) \right) / L_i = y \right]. \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $W_i(t) \rightarrow W_i$ im quadratischen Mittel und somit auch nach Verteilung; folglich konvergieren auch die momentenerzeugenden Funktionen

$$\Psi_i(p, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \phi_i(p) \quad \text{für } p \geq 0, i \in \mathbb{N}_0.$$

Da nun $\exp(-p a(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1, p \geq 0,$

und $p a(t) / a(t-u) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} p \exp(-\alpha u) \quad \text{für 5.6 (a) und (b),}$

erhält man für $t \rightarrow \infty$ aus (5.27) und (5.28) durch dominierte Konvergenz die Gültigkeit von (5.26) für $\phi_i(p)$.

Nachweis der Eindeutigkeitsaussage für 5.6 (a) :

Es ist für $i \in \mathbb{N}_0, p \geq 0$ $\phi_i(p) = E \exp(-p W_i) \leq 1$ und

$\phi_i'(0) = -E W_i$. Sei $\{\bar{\phi}_i(p) : i \in \mathbb{N}_0\}$ eine weitere Folge von

Lösungen von (5.26), die beschränkt sind und für die

$\bar{\phi}_i'(0+) = -E W_i$ gilt. Für festes $i \in \mathbb{N}_0$ und beliebiges $p > 0$ sei

$$\delta_i(p) := p^{-1} |\phi_i(p) - \bar{\phi}_i(p)|.$$

Dann folgt aus Lemma 4.2 und (5.26)

$$\delta_i(p) \leq p^{-1} \int_0^\infty |\phi_{i+2}(p \exp(-\alpha u)) - \bar{\phi}_{i+2}(p \exp(-\alpha u))| dF_i(u)$$

$$= \int_0^\infty \delta_{i+2}(p \exp(-\alpha u)) \exp(-\alpha u) dF_i(u)$$

$$= c_i \int_0^\infty \delta_{i+2}(p \exp(-\alpha u)) d\tilde{F}_i(u), \text{ nach (5.6),}$$

$$= c_i E[\delta_{i+2}(p \exp(-\alpha \tilde{X}_i))].$$

Somit gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$(5.29) \quad \delta_i(p) \leq \left(\prod_{r=0}^n c_{i+2r} \right) E[\delta_{i+2n+2}(p \exp(-\alpha \sum_{r=0}^n \tilde{X}_{i+2r}))].$$

Für die Folge von unabhängigen ZV $\{\tilde{X}_{i+2r} : r \in \mathbb{N}_0\}$ gilt

$\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{X}_{i+2r}$ ist f.s. konvergent oder f.s. divergent.

Da $\tilde{X}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \tilde{X}$ und $\tilde{X}$ eine positive und steige Dichte nach Voraussetzung E hat, ist diese Reihe von ZV f.s. divergent.

Im Fall von Satz 5.6 (a) ist $\prod_{r=0}^{\infty} c_{i+2r} < \infty$, da $\Gamma_i < \infty$.

Aus (5.29) folgt damit für $p > 0$ $\delta_i(p) = 0$ und daraus die behauptete Eindeutigkeit, da i beliebig gewählt wurde.

Bemerkung 5.3 : Eine Eindeutigkeitsaussage bei divergentem Γ_i konnte nicht bewiesen werden. Der vorstehende Nachweis der Eindeutigkeit verallgemeinert eine Beweismethode, die man bei Jagers [19], Theorem 6.8.3 findet. Fildes [14] betrachtet keine momentenerzeugenden Funktionen und Funktionalgleichungen der Grenzvariablen W_i ; somit ist das obige Korollar ein zusätzliches Ergebnis für den generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess von Fildes [14].

§ 6 Anwendungen und Beispiele

In diesem Paragraphen werden spezielle generationsabhängige Verzweigungsprozesse behandelt; unter anderem in 6.2 der Bellman-Harris Prozess, dessen Aussterbeverhalten in Teil II noch untersucht werden soll.

Man erhält aus den Ergebnissen von §2 - §5 sofort Resultate für diese Spezialfälle, so daß sich der in den vorstehenden Paragraphen entwickelte Rahmen des allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozesses mit generationsabhängigen Verteilungen als ökonomisch erweist.

6.1 Variabilität in den ersten Generationen

Wir betrachten eine Population, die mit einem Anfangsindividuum in einer fremden Umgebung gestartet wird und die sich dann in den ersten N Generationen durch Variation ihrer Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen anpaßt. In den folgenden, also ab einschließlich der N -ten, Generationen entwickle sie sich nach einem festen Crump-Mode-Jagers Prozess. Die Verteilungen seien bekannt.

Es ist anschaulich klar, daß man bis auf konstante Faktoren, die die Variabilität in den ersten N Generationen wiedergeben, die Ergebnisse

des Crump-Mode-Jagers Prozesses erhält. Mit Hilfe der vorstehenden Paragraphen bestimmen wir diese Faktoren.

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ fest.

Es seien die WV von $\{L_k; K_k(t), t \geq 0\}$ für $k = 0, 1, \dots, N$ gegeben und $\{L_k; K_k(t), t \geq 0\}$ habe für $k = N+1, \dots$ die gleiche WV wie $\{L_N; K_N(t), t \geq 0\}$ (Bezeichnungen s. §1).

Wir setzen voraus : Für $k = 0, 1, \dots, N$

- (i) $E K_k(t) < \infty$ für $t \geq 0$, $E K_k(0) < 1$;
- (ii) $P(L_k \leq t) = G_k(t)$ ist eine stetige VF mit $G_k(0) = 0$, $G_k(\infty) = 1$;
- (iii) $E N_k(\infty) < \infty$.

Aus (i) - (iii) folgen Voraussetzung B und C aus §4.

Nach §3 ist die Aussterbe-W von $\{Z_0(t), t \geq 0\}$ gleich der des eingebetteten inhomogenen Galton-Watson Prozesses des Generationen.

Man kann sie mit Hilfe der WEF $E[s^{N_k}]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ aus der Aussterbe-W des durch $\{L_N; K_N(t), t \geq 0\}$ erzeugten Crump-Mode-Jagers Prozesses oder eines Galton-Watson Prozesses mit N_N Nachkommen ausrechnen.

Für die erwartete Anzahl von Individuen zur Zeit t folgt aus (4.7)

$$(6.1) \quad M_0(t) = 1 + \sum_{j=0}^{N-1} F_{0,j-1}^* (F_j - G_j)(t) + F_{0,N-1}^* (F_N - G_N) * \sum_{n=0}^{\infty} F_N^{n*}(t),$$

und entsprechend vereinfacht sich (4.11).

Setzen wir für die Reproduktionsfunktionen voraus:

(iv) $F_k(t)$ haben positive und stetige Dichten, $F_k(\infty) > 1$
für $k = 0, 1, \dots, N$,

dann gilt die Voraussetzung E aus §5 mit $F(t) = F_N(t)$.

Die reelle Zahl $\alpha > 0$: $\int_0^{\infty} \exp(-\alpha u) dF_N(u) = 1$

ist der Malthus-Parameter der Population (Def. 5.0) und aus (5.0) folgt

$$(6.2) \quad c_i = \begin{cases} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha u) dF_i(u) & \text{für } i = 0, \dots, N-1 \\ 1 & \text{für } i = N, N+1, \dots \end{cases}$$

$$\Gamma_0 = \prod_{k=0}^{N-1} c_k < \infty.$$

In diesem Beispiel kann man $\lim_{t \rightarrow \infty} U_i(t)$ aus Satz 5.1 z.B. für $i = 0$ berechnen:

Behauptung : Es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t) = \Gamma_0 (\alpha \tilde{c})^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dG_N(t) = \gamma_0.$$

Beweis : Es ist

$$(6.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} F_{0,j-1}^* * G_j(t) = \sum_{j=1}^{N-1} F_{0,j-1}^* * G_j(t) +$$

$$+ G_N * F_{0,N-1}^* * \sum_{n=0}^{\infty} F_N^{n*}(t).$$

Dann folgt aus dem Hauptsatz der Erneuerungstheorie, s. Sewastjanow

[33] VIII, §7 :

$$(6.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\alpha t) G_N * F_{0,N-1}^* * \sum_{n=0}^{\infty} F_N^{n*}(t) \\ = \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} G_N * F_{0,N-1}^*(u) du / \int_0^{\infty} t e^{-\alpha t} dF_N(t) .$$

$$(6.5) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} G_N * F_{0,N-1}^*(u) du = \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} du \int_0^u G_N(u-v) dF_{0,N-1}^*(v) \\ = \int_0^{\infty} e^{-\alpha v} dF_{0,N-1}^*(v) \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} G_N(t) dt \\ = \left(\prod_{k=0}^{N-1} c_k \right) \alpha^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dG_N(t)$$

nach (5.8) , (6.2) und partieller Integration

$$\exp(-\alpha t) \sum_{j=1}^{N-1} F_{0,j-1}^* * G_j(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 .$$

Aus (6.4) und (6.5) folgt mit $\tilde{\mu} = \int_0^{\infty} t \exp(-\alpha t) dF_N(t)$

$$U_0(t) = e^{-\alpha t} \sum_{j=1}^{\infty} F_{0,j-1}^* * G_j(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Gamma_0(\tilde{\mu} \alpha)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dG_N(t) .$$



Aus Satz 5.1 folgt :

Satz 6.1 : Es gelte (i) - (iv). Dann ist

$$M_0(t) e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\Gamma_0}{\alpha \tilde{\mu}} \left(1 - \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} dG_N(u) \right) \\ = \frac{\Gamma_0}{\tilde{\mu}} \int_0^{\infty} (1 - G_N(u)) e^{-\alpha u} du .$$

Bemerkung 6.1 : Im Vergleich mit Satz 6.2 von Crump-Mode [8] sieht man, daß sich in der Konstanten Γ_0 die Variabilität der ersten N Generationen ausdrückt.

Man kann Satz 6.1 auch direkt aus (6.1) mit Hilfe des zitierten Hauptsatzes der Erneuerungstheorie herleiten.

Eine weitere Möglichkeit zu Satz 6.1 zu gelangen, besteht darin, ihn vermöge des folgenden Lemmas auf den Satz 6.2 von Crump- Mode [8] zurückzuführen (vgl. Fildes [14] , Theorem 3.1) :

Lemma : Es gelte (i) - (iv). Wenn ein $i \geq 0$ existiert, so daß

$$M_{i+1}(t) e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} d_{i+1}, \text{ dann } M_i(t) e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} c_i d_{i+1} .$$

Ein Beweis folgt aus (4.6) mit einem "dominierten Konvergenz" Argument.

Aus der Voraussetzung

$$(v) \quad E K_k(t)^2 < \infty \quad \text{für } t \gg 0, \quad E K_k(0)^2 < 1 \quad \text{und} \\ E N_k^2 < \infty \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, N$$

folgt jedenfalls Voraussetzung D aus § 4.

Gilt (i) - (v) , können wir die Sätze 5.2 und 5.6 (a) anwenden :

Es gilt dann für die Bezeichnungen bei Satz 5.2

$$\bar{c}_k = \begin{cases} \int_0^{\infty} \exp(-2\alpha u) dF_k(u) & \text{für } k = 0, 1, \dots, N \\ \bar{c}_N & \text{für } k = N, N+1, \dots \end{cases} ,$$

$$b_k = \left(\prod_{i=k}^{N-1} c_i \right) b_N \quad \text{für } k = 0, 1, \dots \quad (\text{s. Satz 6.1})$$

$$\text{mit } b_N = \tilde{\mu}^{-1} \int_0^{\infty} (1 - G_N(t)) e^{-\alpha t} dt ;$$

$$A_k = E \left(\int_0^{\infty} \exp(-\alpha u) dN_k(u) \right)^2 - \bar{c}_k \text{ für } k = 0, 1, \dots$$

und es ist $A_k = A_N$ für $k = N, N+1, \dots$.

Aus Satz 5.2 folgt :

$$\begin{aligned} M_0(t, \tau) e^{-2\alpha t - \alpha \tau} &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \bar{c}_k \right) b_{j+1}^2 A_j \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \bar{c}_k \right) b_{j+1}^2 A_j + \sum_{j=N}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{N-1} \bar{c}_k \right) c_N^{j-N} b_N^2 A_N \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \bar{c}_k \right) b_{j+1}^2 A_j + \left(\prod_{k=0}^{N-1} \bar{c}_k \right) \frac{b_N^2 A_N}{(1 - \bar{c}_N)} , \end{aligned}$$

$$\text{denn } \bar{c}_N = \int_0^{\infty} \exp(-2\alpha u) dF_N(u) < 1 .$$

Bemerkung 6.2 : Im Vergleich mit Satz 2.2 Crump-Mode [9] sieht man,

daß die Variabilität in den ersten N Generationen

durch den additiven Term $\sum_{j=0}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \bar{c}_k \right) b_{j+1}^2 A_j$ und durch den multiplikativen Term $\prod_{k=0}^{N-1} \bar{c}_k$ gegeben wird.

Aus Satz 5.6 folgt

Satz 6.2 : Es gelte (i) - (v). Dann gilt

$$\frac{Z_0(t)}{b_0 e^{\alpha t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_2} W_0$$

und W_0 ist eine nicht negative ZV mit $E W_0 = 1$ und

$$\begin{aligned} \text{Var } W_0 &= b_0^{-2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \bar{c}_k \right) b_{j+1}^2 A_j + \left(\prod_{k=0}^{N-1} \bar{c}_k \right) b_N^2 A_N b_0^{-2} (1 - \bar{c}_N)^{-1} - 1 \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{\bar{c}_k}{c_k^2} \right) \frac{A_j}{c_j^2} + \left(\prod_{k=0}^{N-1} \frac{\bar{c}_k}{c_k^2} \right) \frac{A_N}{(1 - \bar{c}_N)} - 1. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.3 : Der Fall $N = 0$ ergibt genau einen Crump-Mode Jagers
Prozess in dem alle Individuen in allen Generationen
 nach $\{L_0; K_0(t), t \geq 0\}$ leben und Nachkommen erzeugen, vgl. Bei-
 spiel 1.1. Dann ist $\bar{r}_0 = 1$ und man erhält die Ergebnisse von Crump-
 Mode [8],[9], allerdings unter etwas stärkeren Voraussetzungen.

Mit dem in Bemerkung 5.1 c) gesagten genügt es, in Voraussetzung (iv)
 nur $F_N(\infty) > 1$ zu verlangen.

6.2 Der generationsabhängige Bellman-Harris Prozess

Dieser Verzweigungsprozess beschreibt eine Population, in der die Individuen zum genauen Zeitpunkt ihres Todes alle ihre Nachkommen erzeugen. Lebensdauer und Anzahl der Kinder seien unabhängige ZV, deren WV von der Generationsnummer abhängen können.

Ist Individuum I aus der k-ten Generation, $k \in \mathbb{N}_0$, so habe I die Lebensdauer $L_{\langle I \rangle}$ mit der VF $G_k(t)$ und erzeuge bei seinem Tod $N_{\langle I \rangle}$ Nachkommen. $N_{\langle I \rangle}$ habe die WEF $h_k(s)$; $N_{\langle I \rangle}, L_{\langle I \rangle}$ seien unabhängig.

Setzt man

$$K_I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < L_{\langle I \rangle} \\ N_{\langle I \rangle} & \text{für } t \geq L_{\langle I \rangle} \end{cases},$$

so ist gemäß Definition 1.3 ein spezieller allgemeiner altersabhängiger Verzweigungsprozess mit generationsabhängigen Verteilungen definiert. Die Daten dieses Prozesses sind die Folgen

$$\{G_k(t) : k \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{und} \quad \{h_k(s) : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Wir verweisen auf die Bezeichnungen in §1.

Bemerkung 6.4 :

- (a) Sind die Nachkommensverteilungen in allen Generationen gleich, erhält man Beispiel 1.3, den generationsabhängigen Verzweigungsprozess von Fildes [14].
- (b) Sind die Nachkommensverteilungen und die Lebensdauerverteilungen in allen Generationen gleich, erhält man Beispiel 1.2, den Bellman-Harris Prozess, s. Harris [16], Athreya-Ney [2].

Wir setzen voraus :

(i) $G_k(t)$ seien stetige VF mit $G_k(\infty) = 1$ für $k = 0, 1, \dots$
und es existiere eine VF $\bar{G}(t)$ so, daß $G_k(t) \leq \bar{G}(t)$ für
 $t \geq 0$ und $\bar{G}(0) = 0$, $\bar{G}(\infty) = 1$.

(ii) $m_k := h_k^i(1) \leq \bar{m} < \infty$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $\bar{m} \in \mathbb{R}$.

Aus (i) und (ii) folgen die Voraussetzungen B und C, denn es ist

$$\Delta_k(t) = E K_k(t) = \int_0^\infty E [K_k(t) / L_k = y] dG_k(y) = m_k G_k(t).$$

Da $N_k(t) \stackrel{\text{f.s.}}{=} K_k(t)$, folgt für die Reproduktionsfunktionen aus Def. 4.1

$$(6.6) \quad F_k(t) = \Delta_k(t) = m_k G_k(t) \quad \text{für } t \geq 0, k \in \mathbb{N}_0;$$

und das bedingte WE-Funktional $H_{k,y}(\phi(\cdot))$ wird dann gleich

$$E \left[\exp(\log \phi(y) \cdot N_k) \right] = E \left[\phi(y)^{N_k} \right] \quad \text{gleich der WEF von } N_k,$$

wenn N_k die Anzahl der Nachkommen eines Individuums der k -ten Generation ist.

Folglich haben die Systeme von Integralgleichungen aus §4 für die WEF und die ersten beiden Momente der Populationsgrößen beim generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess die Form

$$(6.7) \quad F_i(s, t) = s(1 - G_i(t)) + \int_0^t h_i(F_{i+1}(s, t-u)) dG_i(u),$$

$$(6.8) \quad M_i(t) = 1 - G_i(t) + m_i \int_0^t M_{i+1}(t-u) dG_i(u),$$

$$(6.9) \quad M_i(t, \tau) = f_i(t, \tau) + m_i \int_0^t M_{i+1}(t-u, \tau) dG_i(u)$$

$$\text{mit } f_i(t, \tau) = 1 - G_i(t+\tau) + m_i \int_t^{t+\tau} M_{i+1}(t+\tau-u) dG_i(u) \\ + h_i''(1) \int_0^t M_{i+1}(t-u) M_{i+1}(t+\tau-u) dG_i(u) .$$

Bemerkung 6.5 : Für $h_k(s) = h(s)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ gehen (6.7) - (6.9) in die Formeln (2.1), (2.3), (3.9) von Fildes [14] über. Wenn zusätzlich noch $G_k(t) = G(t)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, bekommt man die Integralgleichungen für den Bellman-Harris Prozess, s. Harris [16], Kap VI, (7.3), (15.1), (18.1) .

Für die zweiten Momente in (6.9) fordern wir zusätzlich

$$(iii) \quad E N_k^2 \leq \bar{m}_2 < \infty \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 .$$

$$\text{und setzen } h_k''(1) = \delta_k .$$

Aus der Voraussetzung

$$(iv) \quad G_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} G(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \infty] ,$$

$G_k(t), G(t)$ haben positive und stetige Dichten,

$$m_k > 1 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } m_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} m > 1 .$$

folgt die Voraussetzung E .

Unter den Voraussetzungen (i) - (iv) kommen wir jetzt zu den Ergebnissen von §5 in diesem Spezialfall:

Der Malthus-Parameter α ist definiert durch $\int_0^\infty e^{-\alpha u} dG(u) = 1/m$, $\alpha > 0$. Für $i \in \mathbb{N}_0$ wird

$$c_i = m_i \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} dG_i(u) = m_i d_i ,$$

$$d_i := \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} dG_i(u) \text{ gesetzt ;}$$

$$\Gamma_i = \prod_{k=i}^{\infty} m_k d_k ;$$

$$F_{i,j}^*(t) = \left(\prod_{k=i}^j m_k \right) G_{i,j}^*(t) \quad j = i, i+1, \dots ,$$

$$\tilde{\mu} := m \int_0^{\infty} t e^{-\alpha t} dG(t) .$$

Für $U_i(t)$ aus Satz 5.1 gilt jetzt für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die

Behauptung : $\lim_{t \rightarrow \infty} U_i(t) = \left(\prod_{k=i}^{\infty} m_k d_k \right) (m \alpha \tilde{\mu})^{-1} = \gamma_i .$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \sum_{j=i+1}^{\infty} F_{i,j-1}^* G_j(t) &= e^{-\alpha t} \sum_{j=i+1}^{\infty} m_j^{-1} F_{i,j}^*(t) \\ &= m_i \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} G_i(t-u) d\hat{H}_{i+1}(u) \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6.11) \quad \hat{H}_{i+1}(t) &:= \int_0^t e^{-\alpha u} d \left(\sum_{j=i+1}^{\infty} m_j^{-1} F_{i+1,j}^*(u) \right) \\ &= \sum_{j=i+1}^{\infty} m_j^{-1} \Gamma_{i+1,j} \tilde{F}_{i+1,j}^*(t) , \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{i,j} , \Gamma_{i,j} \text{ siehe (5.6) - (5.9) .}$$

Dann folgt wie in 2. des Beweises von Satz 5.1 aus dem Theorem 9 von Smith, siehe Anhang,

$$m_i \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} G_i(t-u) d\hat{H}_{i+1}(u) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \gamma_i$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{t \rightarrow \infty} m_i \lim_{j \rightarrow \infty} (\prod_{i+1, j} m_j^{-1}) \tilde{\mu}^{-1} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) G_i(t) dt \\ & = (\prod_{k=i}^{\infty} m_k d_k) (m \alpha \tilde{\mu})^{-1} . \end{aligned}$$



Aus Satz 5.1 folgt :

Satz 6.3 : Es gelte (i) - (iv) und $\prod_{k=0}^{\infty} m_k d_k < \infty$.
Dann ist für $i \in \mathbb{N}_0$

$$(6.12) \quad M_i(t) e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1 - m^{-1}) (\prod_{j=i}^{\infty} m_j d_j) \cdot \tilde{\mu}^{-1} =: b_i .$$

Aus den Bezeichnungen (5.15) wird für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\bar{c}_k = m_k \int_0^{\infty} \exp(-2\alpha u) dG_k(u) = m_k \bar{d}_k ,$$

$$\bar{d}_k := \int_0^{\infty} \exp(-2\alpha u) dG_k(u) \text{ gesetzt ;}$$

$$\begin{aligned} A_k &= E \left[\int_0^{\infty} \exp(-2\alpha u) dN_k(u) \right]^2 - \bar{c}_k \\ &= \int_0^{\infty} E \left[\exp(-\alpha y) N_k \right]^2 dG_k(y) - \bar{c}_k = \bar{d}_k (E N_k^2 - E N_k) \\ &= \bar{d}_k \delta_k . \end{aligned}$$

Falls $\prod_{k=0}^{\infty} m_k d_k < \infty$, folgt dann aus Satz 5.2 für $i \in \mathbb{N}_0, \tau > 0$

$$(6.13) \quad M_i(t, \tau) e^{-2\alpha t - \alpha \tau} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_{j=i}^{\infty} (\prod_{k=i}^{j-1} m_k \bar{d}_k) b_{j+1}^2 \bar{d}_j \delta_j < \infty .$$

Aus Satz 5.6 (a) folgt

Satz 6.4 : Es gelte (i) - (iv) und $\prod_{k=0}^{\infty} m_k \bar{d}_k < \infty$.

Dann gilt für $i \in \mathbb{N}_0$

$$Z_i(t) / (b_i e^{\alpha t}) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_2} W_i ;$$

W_i ist eine nicht negative ZV mit $E W_i = 1$, und nach (6.13) ist

$$\text{Var } W_i = \sum_{j=i}^{\infty} \left(\prod_{k=i}^j \bar{d}_k (m_k d_k^2)^{-1} \right) \delta_j m_j^{-2} - 1 \gg 0 .$$

Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist $b_i > 0$ und man sieht leicht, daß

Var $W_i > 0$, wenn $\sum_{j=i}^{\infty} \left[(1 - m_j^{-1}) \left(\prod_{k=i}^{j-1} m_k \right)^{-1} \right] > 1$:

Nach der Jensenschen Ungleichung ist nämlich $\bar{d}_k \gg d_k^2$ und außerdem $h_j^*(1) - m_j^2 + m_j \gg 0$ (vgl. Fildes [14], S. 473) .

Bemerkung 6.6 : Die Sätze 6.3 und 6.4 und die Beziehung (6.13)

entsprechen den Ergebnissen von Fildes [14], wenn

nur die Lebensdauern variieren und folglich $m_k = m$ und $\delta_k = \bar{h}(1)$

für alle k gilt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für

Var W_i konnte nicht gefunden werden.

Ist $\prod_0$ divergent, wenden wir entsprechend die Ergebnisse aus 5.2 an.

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.3 gilt jetzt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{U}_i(t) = \beta_{i+1} c_i (m \alpha \mu^{\gamma} \Gamma(1+\gamma))^{-1} = B_i/m = \mathcal{K}_i .$$

Beweis : Setze

$$A_i(t) := \sum_{j=i+1}^{\infty} \Gamma_{i,j-1} \left(\int_0^t G_j(t-u) e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{F}_{i,j-1}^*(u) \right)$$

$$= \sum_{j=i+1}^{\infty} \Gamma_{i,j-1} m_j^{-1} \left(\int_0^t F_j(t-u) e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{F}_{i,j-1}^*(u) \right).$$

Aus (5.8) und (5.9) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^t F_j(t-u) e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{F}_{i,j-1}^*(u) &= (\Gamma_{i,j-1})^{-1} e^{-\alpha t} \int_0^t F_j(t-u) dF_{i,j-1}^*(u) \\ &= (\Gamma_{i,j-1})^{-1} e^{-\alpha t} F_{i,j-1}^*(t) \\ &= c_j c_i^{-1} \int_0^t F_i(t-u) e^{-\alpha(t-u)} d\tilde{F}_{i+1,j}^*(u). \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung folgt

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \int_0^t F_i(t-u) e^{-\alpha(t-u)} d \left(\sum_{j=i+1}^{\infty} m_j^{-1} \Gamma_{i+1,j} \tilde{F}_{i+1,j}^*(u) \right) \\ &= \int_0^t F_i(t-u) e^{-\alpha(t-u)} d\hat{H}_{i+1}(u). \end{aligned}$$

Dann folgt analog dem Beweis von 2. und 3. bei Satz 5.3

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T^\gamma L(T))^{-1} \int_0^T A_i(t) dt = \beta_{i+1} c_i (m \alpha \tilde{\mu}^\gamma \Gamma(1+\gamma))^{-1}. \quad \square$$

Die Sätze 5.4, 5.5 und 5.6(b) können direkt auf diesen Spezialfall angewendet werden, indem man das jetzt bekannte K_i benutzt.

Im folgenden bringen wir noch ein Beispiel für einen generations-abhängigen Bellman-Harris Prozess mit divergentem Γ_0 , bei welchem man die Normierung $t^{\gamma-1} e^{-\alpha t}$ mit $\gamma > 1$ hat.

Sei $(G_k(t), h_k(s) : k \in \mathbb{N}_0)$ eine Folge von VF und WEF der Lebens-

dauer-und Nachkommensverteilungen, die den Voraussetzungen (i)-(iv) genügen; speziell sei

$$G_k(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda_k t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

mit $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda > 0$.

Dann ist $\alpha = \lambda(m-1)$, $\tilde{\alpha} = (m\lambda)^{-1}$,

$$(6.14) \quad \begin{aligned} c_i &= m_i d_i & \text{mit } d_i &= [1 + \lambda(m-1)\lambda_i^{-1}]^{-1}, \\ \bar{c}_i &= m_i \bar{d}_i & \text{mit } \bar{d}_i &= [1 + 2\lambda(m-1)\lambda_i^{-1}]^{-1}. \end{aligned}$$

Nach dem bekannten Kriterium über die Konvergenz unendlicher Produkte ist

$$\prod_0 \text{ divergent} \iff \sum_{j=0}^{\infty} \ln\left(\frac{m_j}{1 + \frac{\lambda}{\lambda_j}(m-1)}\right) \text{ divergent}.$$

Wir untersuchen nun $Z_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_0$, wenn die Folgen $\{\lambda_k\}, \{m_k\}$ "harmonisch von oben" konvergieren:

Es seien $a, b > 0$ reelle Zahlen und

$$(6.15) \quad \begin{cases} \lambda_k = \lambda + a/k, \\ m_k = m + b/k & \text{für } k \in \mathbb{N}, \\ \lambda_0 = \lambda_1, m_0 = m_1. \end{cases}$$

Dann ist für genügend große k

$$\begin{aligned} \ln(m_k [1 + \lambda(m-1)\lambda_k^{-1}]^{-1}) &= \\ &= \ln(1 + \frac{b}{mk}) + \ln(1 + \frac{a}{\lambda k}) - \ln(1 + \frac{a}{\lambda mk}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k} \left(\frac{b}{m} + \frac{a}{\lambda} - \frac{a}{m\lambda} \right) + \frac{1}{k^2} \text{ Konstant} + \text{höhere Terme in } \frac{1}{k};$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left(m_k / (1 + \lambda(m-1)\lambda_k^{-1}) \right) = \infty \text{ also } \Gamma_0 \text{ divergent.}$$

$$\text{Mit } \gamma_1 := \frac{b}{m} + \frac{a}{\lambda} - \frac{a}{m\lambda} = (m\lambda)^{-1} (b\lambda + a(m-1)) > 0$$

$$\text{gilt } \Gamma_{i,i+n-1} = \prod_{k=i}^{i+n-1} m_k d_k$$

$$= \exp \left(\sum_{k=i}^{i+n-1} \ln \left(m_k / (1 + \lambda(m-1)\lambda_k^{-1}) \right) \right)$$

(6.16)

$$= \exp \left(\gamma_1 \sum_{k=i}^{i+n-1} \frac{1}{k} + \text{niedrigere Terme in } n \right)$$

$$\sim C_i n^{\gamma_1} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{mit einer reellen Zahl } C_i$$

die nur noch von i abhängt. Darüber hinaus existiert eine reelle Zahl C :

$$(6.17) \quad \Gamma_{i,i+n-1} \leq C n^{\gamma_1}.$$

$$(6.18) \quad \sum_{j=i}^{i+N-1} \Gamma_{i,j} = \sum_{n=1}^N \Gamma_{i,i+n-1} \sim \beta_i N^{\gamma_1+1} / \Gamma(\gamma_1+2)$$

für $N \rightarrow \infty$ mit einer reellen Zahl β_i .

Aus (6.15) folgt $\lambda_k(m_k - 1) \geq \lambda(m-1)$ für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha(1-G_k(t)) - F'_k(t) + G'_k(t) &= \lambda(m-1)e^{-\lambda_k t} + (1-m_k)\lambda_k e^{-\lambda_k t} \\ &= e^{-\lambda_k t} (\lambda(m-1) - \lambda_k(m_k-1)) \leq 0 \end{aligned}$$

und aus Satz 5.0 folgt dann, daß $M_i(t) \exp(-\alpha t)$ monoton wächst.

Daraus und aus (6.16) - (6.18) folgt dann die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 5.5 mit $\gamma = \gamma_1 + 1$.

Aus Satz 5.6 (b) und den vorstehenden Überlegungen folgt dann

$$Z_i(t) / b_i (\gamma_1 + 1) t^{\gamma_1} \exp(\alpha t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_2} W_i$$

$$\text{mit} \quad E W_i = 1 ,$$

$$(6.19) \quad \gamma_1 = b \lambda + a(m-1) / m \lambda > 0 ,$$

$$b_i = \beta_{i+1} c_i \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(\alpha \tilde{c}^{\gamma_1+1} \Gamma(\gamma_1+2)\right)^{-1}.$$

Bemerkung 6.7 : Dieses Beispiel verallgemeinert das Beispiel 4.1 von Fildes [14]. Man sieht, daß eine Änderung der Normierung der Populationsgröße durch Variabilität allein in der Lebensdauerverteilung, aber auch allein in der Nachkommensverteilung oder natürlich auch in beiden Verteilungen erzwungen werden kann. In dem obigen Beispiel kann bei festem m und λ der Exponent γ_1 für $a, b > 0$ beliebig groß werden, $\gamma_1 = b/m + a(1 - m^{-1}) / \lambda$ setzt sich in diesem Beispiel additiv zusammen aus einem Anteil b/m , in dem sich die Variabilität der Nachkommensverteilung ausdrückt, und einem Anteil $a(1 - m^{-1}) \lambda^{-1}$, in dem sich die Variabilität der Lebensdauerverteilung ausdrückt.

6.3 Generationsabhängige Poissonsche Verzweigungsprozesse

Bellman-Harris Prozesse beschreiben Populationen, in denen die Anzahl der Kinder nicht von der Lebensdauer der Eltern abhängt. In diesem Abschnitt wollen wir kurz einige Beispiele von generationsabhängigen Crump-Mode-Jagers Prozessen angeben, bei welchen " Individuen, die länger leben, gewöhnlich mehr Kinder haben" . Dies sind gleichzeitig Prozesse , in welchen L_1 und $(K_1(t) , t \geq 0)$ für alle Individuen 1 unabhängig sind und demnach die Vereinfachungen von Bemerkung 4.1 benützt werden können.

Ein generationsabhängiger Poissonscher Verzweigungsprozess beschreibe eine Population, deren Individuen in der k -ten Generation eine Lebensdauer L_k mit VF $G_k(t)$ haben, die unabhängig vom Reproduktionsprozess $\{K_k(t), t \geq 0\}$ ist, der ein zusammengesetzter Poisson Prozess ist:

$$(6.20) \quad K_k(t) = \sum_{j=1}^{Q_k(t)} \nu_j^{(k)} \quad \text{und es ist}$$

$$(6.21) \quad \{\nu_j^{(k)} : j = 1, 2, \dots\} \quad \text{eine Folge unabhängiger und}$$

identisch verteilter ZV, alle mit der gleichen WEF $f_k(s)$;

$\{Q_k(t)\}$ ein inhomogener Poisson-Prozess mit Parameter-

funktion $\theta_k(t)$ und $\{\nu_j^{(k)}\}, \{Q_k(t)\}$ seien unabhängig;

für $k \in \mathbb{N}_0, t \geq 0$.

Das heißt: Ein Individuum der k -ten Generation bekommt zu Zeitpunkten, die nach dem Poisson-Prozess $\{Q_k(t)\}$ verteilt sind, Kinder: und zwar im j -ten Zeitpunkt ($\hat{=}$ Alter) $\nu_j^{(k)}$ Kinder. Seine Lebensdauer hängt nicht von den Mutterschaften ab.

Gemäß Definition 1.3 liefert die Folge $\{G_k(t), f_k(s), \theta_k(t) : k \in \mathbb{N}_0\}$ die Daten für einen generationsabhängigen allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozess $\{Z_i(t), t \geq 0\}$, $i \in \mathbb{N}_0$.

Analog Crump-Mode [8],[9] vereinfachen sich die Systeme von Integralgleichungen aus §4 wegen der Unabhängigkeit von L_k und $\{K_k(t)\}$. Diese und einige weitere Ergebnisse, die man analog Crump-Mode erhält, aber nicht sehr viel beinhalten, sollen hier nicht dargestellt werden. Stattdessen erwähnen wir noch einige bekannte Prozesse mit Generationsabhängigkeiten, die man durch Spezialisierung der Daten $\{G_k(t), f_k(s), \theta_k(t)\}$ erhält.

Beispiel 6.3.1 : Ist $\nu_j^{(k)} \equiv 1$ für alle j ,

$$G_k(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu_k(x) dx\right),$$

$\mu_k(t)$ stetig, $\theta_k(t)$ stetig differenzierbar,

dann ist $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ ein altersabhängiger Geburts- und Todes-Prozess mit generationsabhängigen Geburtsraten $\theta_k'(t)$ und Todesraten $\mu_k(t)$, s. Harris [16] S. 159.

Beispiel 6.3.2 : Ist $\nu_j^{(k)} \equiv 1$ für alle j ,

$$G_k(t) = 1 - \exp(-\lambda_k t),$$

$\{Q_k(t)\}$ ein (homogener) Poisson-Prozess mit Parameter λ_k ,

dann ist $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ ein Geburts- und Todes-Prozess mit den generationsabhängigen Geburts- und Todesraten λ_k und μ_k .

Beispiel 6.3.3 : Ist $G_k(t) = 1 - \exp(-\mu_k t)$,

$\{Q_k(t)\}$ ein (homogener) Poisson-Prozess mit
Parameter λ_k ,

dann ist $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ eine generationsabhängige Version eines Markovschen Verzweigungsprozesses; s. Harris [16], Kap V, Crump-Mode [9], Theorem 4.2, das auch im generationsabhängigen Fall gilt. Dies ist dann ein spezieller generationsabhängiger Bellman-Harris Prozess, s. 6.2.

Teil II

Verhalten der Populationsgenerationen

In diesem Teil soll das Aussterben der Populationsgenerationen als eine spezielle Fragestellung an den generationsabhängigen Verzweigungsprozess behandelt werden.

§ 7 Die Größe der Populationsgenerationen

7.1 Generationsfragen bei Verzweigungsprozessen

Die Frage nach dem Aussterben von Populationsgenerationen ist eine von mehreren möglichen Fragestellungen zum Verhalten von Generationen als bestimmte Teilpopulationen der Gesamtpopulation.

Die gesamte n -te Populationsgeneration in einem generationsabhängigen allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozess mit einem Urvater in der i -ten Generation wurde bereits in §3 definiert: $\mathcal{J}_n(i)$. Es interessiert aber auch, wieviele Individuen der n -ten Populationsgeneration zur Zeit t leben.

Definition 7.1 : Mit den Bezeichnungen von §1 heißt für $n \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$

$$Z_i^{(n)}(t) := \sum_{I \in \mathcal{J}_n(i)} 1_{Z_{I,t}}$$

die Anzahl der Individuen zur Zeit t in der n -ten Populationsgeneration bei einem Urvater in der i -ten Generation.

Man beachte wieder, daß im generationsabhängigen Fall die Individuen der n -ten Populationsgeneration in der $i+n$ -ten Generation leben, wenn $\langle i \rangle$ der Urvater war.

Definition 7.2 : Seien für $i, n, m \in \mathbb{N}_0, t \geq 0, \tau \geq 0$

$$F_i^{(n)}(s, t) := E \left[s Z_i^{(n)}(t) \right],$$

$$M_i^{(n)}(t) := E Z_i^{(n)}(t),$$

$$C_i^{(n, m)}(t, t+\tau) := E \left[Z_i^{(n)}(t) Z_i^{(m)}(t+\tau) \right]$$

die WEF und ersten beiden Momente der Populationsgenerationen.

Bezeichnung : Für nicht generationsabhängige Verzweigungsprozesse, bei welchen also Generation und Populationsgeneration identisch sind, bezeichnen wir die in den Definitionen 3.1, 7.1 und 7.2 eingeführten Größen entsprechend mit

$$\sum_n, Z^{(n)}(t), F^{(n)}(s, t), M^{(n)}(t) \text{ und } C^{(n, m)}(t, t+\tau).$$

Für den Bellman-Harris Prozess, s. Beispiel 1.2 und die Bemerkungen 6.4 und 6.5, betrachtet Harris [16], Kap VI, 9., die Anzahl der Individuen in den Generationen 0, 1, ..., k-1, die zur Zeit t leben:

$$(7.1) \quad Z^{(k)}(t) := \sum_{n=0}^{k-1} Z^{(n)}(t) \quad \text{und erhält für die WEF}$$

$$F^{(k)}(s, t) := E \left[s Z^{(k)}(t) \right] \quad \text{das Gleichungssystem}$$

$$F^{(0)}(s, t) = 1$$

$$(7.2) \quad F^{(k+1)}(s, t) = s(1-G(t)) + \int_0^t h(F^{(k)}(s, t-u)) dG(u)$$

für $k \in \mathbb{N}_0; t \geq 0, s \in [0, 1]$.

Bühler [6] modifiziert (7.2) für den Fall, daß beim Bellman-Harris Prozess die Individuen nach der Geburt ihrer Nachkommen mit der Wahrscheinlichkeit $\beta \in [0,1]$ weiterleben, mit einem "neuen Leben" in der "alten Generation". Außerdem gibt er das System von Integralgleichungen für $\{F^{(k)}(s,t), k \in \mathbb{N}_0\}$ an. Ebenfalls beim Bellman-Harris Prozess benützt Samuels [31] Integralgleichungen für die Momente $M^{(n)}(t)$ und $C^{(n,n)}(t,t)$. Für die Erwartungswerte gilt z.B.

$$(7.3) \quad M^{(n)}(t) = m^n (G^{n*}(t) - G^{(n+1)*}(t)), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wenn G die VF der Lebensdauer, G^{n*} ihre n -fache Faltung und m die mittlere Anzahl von Nachkommen pro Individuum ist.

Für den Crump-Mode-Jagers Prozess gibt Jagers [19], 8.5, die Integralgleichungen und ihre Lösungen für $M^{(n)}(t)$ und $C^{(n,n)}(t,t)$ an. Aus (7.3) wird dann

$$(7.4) \quad M^{(n)}(t) = (1 - G(t)) * F^{n*}(t),$$

wenn G die VF der Lebensdauer und F die Reproduktionsfunktion ist. Explizite Darstellungen für die zweiten Momente $C^{(n,n)}(t,t)$ erhalten die genannten Autoren entsprechend.

Zur Beschreibung des Verhaltens der Generationen werden für den superkritischen Crump-Mode-Jagers Prozess bei Jagers [19], 8.5, für den superkritischen Bellman-Harris Prozess bei Samuels [31] und Martin-Löf [27], für den Markovschen Verzweigungsprozess bei Bühler [6] und [5] und Kharlamov [21], [22], und [23] hauptsächlich die beiden folgenden Probleme untersucht:

- I Verteilung der Generationen in der Population zu einem bestimmten Zeitpunkt t ; Verteilung der Generation $N^*(t)$ eines zufällig

zur Zeit t aus der Population ausgewählten Individuums asymptotisch für $t \rightarrow \infty$.

II Zeitliche Verteilung einer bestimmten Generation n während der Entwicklung der Population; Verteilung des Zeitpunkts T_n der Geburt eines zufällig aus der n -ten Generation ausgewählten Individuums asymptotisch für $t \rightarrow \infty$.

Die Ergebnisse von Fildes [15] für den Bellman-Harris Prozess mit generationsabhängigen Lebensdauerverteilungen, die sich auf diese Fragestellungen beziehen lassen, kann man ohne sonderliche Mühe auf den Bellman-Harris Prozess mit generationsabhängigen Lebensdauer- und Nachkommensverteilungen verallgemeinern. Dies soll in dieser Arbeit aber nicht weiter verfolgt werden.

Weitere Problemstellungen über Generationen und insbesondere auch über Verwandtschaftsstrukturen werden von Bühler [5], [6], und [7] für den Bellman-Harris Prozess formuliert. Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit sollen daraus nur die beiden folgenden Fragestellung erwähnt werden:

III Verteilung des Zeitpunkts U_n der Geburt des ersten Individuums der n -ten Generation.

IV Verteilung des Zeitpunkts $V^{<n>}$ des Todes des letzten Individuums der n -ten Generation, d.h. des Zeitpunkts des Aussterbens der n -ten Generation.

Zu III erhält Bühler [6], 6., mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung der WEF $F^{<k>}(s, t)$ für einen Bellman-Harris Prozess mit der WEF $h(s)$ für die Anzahl von Nachkommen pro Individuum und mit $G(0+) = 0$,

$G^i(o) = 1$, $0 < m < \infty$, daß sich die Generationen bei einer großen Anfangspopulation bis auf eine Zeittransformation nach einem zusammengesetzten Poisson-Prozess entwickeln. Man erhält dabei

$$(7.6) \quad P(U_n \leq t) = t^n m^{n-1} (1 - h(o)) / n! + o(t^n)$$

für $t \rightarrow 0$.

Zum Problem des Aussterbens der Generationen erhält man, s. Bühler [7], beim Markovschen Verzweigungsprozess mit beschränkter Anzahl von Nachkommen pro Individuum für $t \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(7.7) \quad P(V^{(n)} > t) = e^{-t} (m t)^n / n! + o(e^{-t} t^n).$$

Eine formale Definition dieses Aussterbezeitpunkts ist

Definition 7.3 : Mit den Bezeichnungen von §1 heißt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$V_i^{(k)} := \inf \left(t : 1_{D_{I,t}} = 1 \text{ für alle } I \in J_k(i) \right)$$

der Zeitpunkt des Austerbens der k-ten Populationsgeneration bei einem Urvater in der i-ten Generation.

Bevor wir in den folgenden Paragraphen der Frage IV im Rahmen der generationsabhängigen Verzweigungsprozesse nachgehen, zeigen wir in 7.2 einige allgemeine Ergebnisse über Generationsgrößen.

7.2 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen und Momente

In diesem Abschnitt werden Systeme von Integralgleichungen für die WEF und die ersten beiden Momente der Populationsgenerationsgrößen $\langle k \rangle$ $Z_i(t)$, $k, i \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$, angegeben. In diesem Sinn entspricht dieser Abschnitt Teilen aus § 4.

Mit den Bezeichnungen aus § 1 und 7.1 gelten die Darstellungsformeln

$$(7.8) \quad Z_i^{(0)}(t, \omega) := \delta(L_i(\omega) - t),$$

$$(7.9) \quad Z_i^{(n)}(t, \omega) := \sum_{j=1}^{N_i(t)(\omega)} Z_{i+1}^{(n-1)}(t - T_{\langle i \rangle}^{(j)}, \omega_j) \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

für $i \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$, wobei $\omega \in \Omega(i)$ und $\omega_j \in \Omega_j(i)$ die Projektion ist.

Anschauliche Interpretation von (7.8) und (7.9) :

Der Urvater $\langle i \rangle$ macht die 0-te Populationsgeneration aus; er stirbt zur Zeit L_i . Die Anzahl seiner Nachkommen, die zur Zeit t in der n -ten Populationsgeneration, also n Generationen später, leben, ist gleich der Anzahl der Nachkommen seiner Kinder, die zur Zeit $t - n - 1$ Generationen später leben. Da das j -te Kind von $\langle i \rangle$ erst zur Zeit $T_{\langle i \rangle}^{(j)}$ geboren wird, trägt es genau nach der Zeit $t - T_{\langle i \rangle}^{(j)}$ zu dieser Anzahl bei.

Definiere für $s \in [0, 1]$, $i, n \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$

$$(7.10) \quad \hat{F}_i^{(n)}(s, t) := \begin{cases} F_i^{(n)}(s, t) & \text{für } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Dann folgt aus (7.8) mit den Bezeichnungen aus 4.1

Lemma 7.1 : Es gelte die Voraussetzung B. Dann gilt für $i \in \mathbb{N}_0$,
 $t \gg 0$, $s \in [0,1]$

(a) für die WEF

$$(7.11) \quad F_i^{<0>}(s,t) = G_i(t) + s(1 - G_i(t))$$

$$(7.12) \quad F_i^{<n>}(s,t) = \int_0^\infty H_{i,y}(\hat{F}_{i+1}^{<n-1>}(s,t-)) dG_i(y), \quad n \in \mathbb{N};$$

(b) für die Erwartungswerte

$$(7.13) \quad M_i^{<0>}(t) = 1 - G_i(t)$$

$$(7.14) \quad M_i^{<n>}(t) = \int_0^t M_{i+1}^{<n-1>}(t-u) dF_i(u), \quad n \in \mathbb{N};$$

(c) die explizite Darstellung

$$(7.15) \quad M_i^{<n>}(t) = (1 - G_{i+n}) * F_{i,i+n-1}^*(t), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis :

(a) (7.11) folgt direkt aus (7.8). (7.12) folgert man durch Bedingen bezüglich $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_{i+1}}$ aus der Darstellung (7.9), wie dies auch in (4.3) zu Satz 4.1 getan wurde.

(b) Die Formeln (7.13) und (7.14) kann man aus (7.11) und (7.12) durch Differentiation in $s = 1$ ableiten ;

oder man beweist (7.13) direkt aus (7.8) und (7.14) wieder durch Bedingen bezüglich $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_{i+1}}$ in (7.9), wie dies im Teil a) des Beweises von Satz 4.3 gemacht wurde;

oder aber man überlegt sich analog der obigen anschaulichen Interpretation von (7.8) und (7.9), daß

$\langle 0 \rangle$
 $M_i(t) = E Z_i^{(0)}(t) = P(\langle i \rangle \text{ erreicht das Alter } t) \text{ ist, und daß}$
 $\langle n \rangle$
 $M_i(t) = \text{erwartete Anzahl von Individuen in der } n\text{-ten Populations-}$
 $\text{generation zur Zeit } t = \text{der "Summe über } u \in [0, t] \text{ " der mittleren}$
 $\text{Anzahl von Nachkommen nach der Zeit } t-u \text{ und } n-1 \text{ Generationen später}$
 $\text{der Kinder von } \langle i \rangle, \text{ die im Zeitintervall } du \text{ geboren werden, multi-}$
 $\text{pliziert mit der mittleren Anzahl } F_i(du) = dF_i(u) \text{ der Kinder, die}$
 $\langle i \rangle \text{ in } du \text{ erzeugt. Diese heuristische Überlegung macht (7.14) so-}$
 fort plausibel.

(c) (7.15) beweist man leicht durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. □

$\langle n \rangle$
 Was in Lemma 7.1 für die WEF von $Z_i^{(n)}(t)$ und die Erwartungswerte ge-
 zeigt wurde, führen wir im folgenden Lemma für die gemeinsame WEF
 von zwei Populationsgeneartionsgrößen zu verschiedenen Zeitpunkten
 und ihres gemeinsamen Moments durch.

Sei für $i, n \in \mathbb{N}_0, t, \tau \geq 0, |s|, |\varpi| \leq 1$

$$(7.16) \quad F_i^{(n)}(s, \varpi; t, \tau) := E \left[s^{Z_i^{(n)}(t)} \varpi^{Z_i^{(n)}(t+\tau)} \right]$$

die gemeinsame WEF von $Z_i^{(n)}(t)$ und $Z_i^{(n)}(t+\tau)$.

Wir benötigen noch die abgekürzte Schreibweise: (vgl. Bemerkung 4,2)

$$\hat{F}_{i+1}^{(n)}(s, \varpi; t-u, \tau; t, t+\tau-u) := \hat{F}_{i+1}^{(n)}(s, \varpi; t-u, \tau) \tilde{F}_{i+1}^n(\varpi; t, t+\tau-u),$$

$$\hat{F}_{i+1}^{(n)}(s, \varpi; t-u, \tau) := \begin{cases} \hat{F}_{i+1}^{(n)}(s, \varpi; t-u, \tau) & \text{für } 0 \leq u \leq t \\ 1 & \text{für } u > t \end{cases},$$

$$\tilde{F}_{i+1}^{(n)}(s; t, t+\tau-u) := \begin{cases} F_{i+1}^{(n)}(s, t+\tau-u) & \text{für } t \leq u \leq t+\tau \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\varphi_i(u, v) := E [N_i(u) N_i(v)]$$

Lemma 7.2 : Es gelten die Voraussetzungen B und D.

Dann gilt für $i \in \mathbb{N}_0$, $t, \tau \geq 0$, $|s|, |s| \leq 1$

(a) Für die gemeinsame WEF, $n \in \mathbb{N}$,

$$(7.17) \quad F_i^{(n)}(s, s; t, \tau) = G_i(t) + s(G_i(t+\tau) - G_i(t)) + s s (1 - G_i(t+\tau)),$$

$$(7.18) \quad F_i^{(n)}(s, s; t, \tau) = \int_0^\infty H_{i,y}(\tilde{F}_{i+1}^{(n-1)}(s, s; t-, \tau; t, t+\tau-)) dG_i(y);$$

(b) für die zweiten Momente, $n, m \in \mathbb{N}$,

$$(7.19) \quad (1) \quad C_i^{(0,0)}(t, t+\tau) = 1 - G_i(t+\tau),$$

$$(2) \quad C_i^{(0,m)}(t, t+\tau) = E \left[\int_{L_i-t}^{t+\tau} M_{i+1}^{(m-1)}(t+\tau-u) dN_i(u) \right],$$

$$(3) \quad C_i^{(n,0)}(t, t+\tau) = E \left[\int_{L_i-t-\tau}^t M_{i+1}^{(n-1)}(t-u) dN_i(u) \right],$$

$$(4) \quad C_i^{(n,m)}(t, t+\tau) = \int_0^t \int_0^{t+\tau} M_{i+1}^{(n-1)}(t-u) M_{i+1}^{(m-1)}(t+\tau-v) d\varphi_i(u, v) \\ - \int_0^t M_{i+1}^{(n-1)}(t-u) M_{i+1}^{(m-1)}(t+\tau-u) dF_i(u) \\ + \int_0^t C_{i+1}^{(n-1, m-1)}(t-u, t+\tau-u) dF_i(u);$$

(c) die Darstellung für $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$(7.20) \quad C_i^{(n,m)}(t, t+\tau) = \sum_{k=1}^{\min(n,m)} a_{i+k}^{(n-k, m-k; t, \tau)} F_{i, i+k}^* (t)$$

mit

$$(7.21) \quad a_{i+k}^{(n-k, m-k; t, \tau)} := \\ = \int_0^t \int_0^{t+\tau} M_{i+k}^{(n-k)}(t-u) M_{i+k}^{(m-k)}(t+\tau-v) d\varphi_{i+k-1}(u, v) \\ - \int_0^t M_{i+k}^{(n-k)}(t-u) M_{i+k}^{(m-k)}(t+\tau-u) dF_{i+k-1}(u)$$

für $k = 1, 2, \dots, \min(n, m) - 1$, und

$$a_{i+\min(n,m)}^{(n', m'; t, \tau)} := \begin{cases} C_{i+\min(n,m)}^{(n', m')}(t, t+\tau) & n \neq m \\ 1 - G_i(t+\tau) & n = m \end{cases}$$

$n' := n - \min(n, m)$, $m' := m - \min(n, m)$.

Beweis :

$$(a) \quad F_i^{(n,m)}(s, \sigma; t, \tau) = E \left[s^{\delta(L_i - t)} \sigma^{\delta(L_i - t - \tau)} \right] \\ = s \sigma (1 - G_i(t+\tau)) + s(G_i(t+\tau) - G_i(t)) + G_i(t) \text{ nach (7.8)}$$

$\Rightarrow$ (7.17).

(7.18) zeigen wir o.B.d.A. für $i = 0$: Wir bedingen dazu analog (4.3).

mit (7.9) und verwenden, daß

$(Z_1^{(n-1)}(t+\tau - T_{(0)}^{(j)}), Z_1^{(n-1)}(t - T_{(0)}^{(j)}))$ für $j = 1, 2, \dots$ unabhängige

Paare von ZV sind. Daraus ergibt sich

$$F_0^{(n)}(s, \sigma; t, \tau) = \int_0^\infty dG_0(y) E \left[\prod_{j=1}^{N_{(0)}(t)} s^{Z_1^{(n-1)}(t - T_{(0)}^{(j)})} \sigma^{Z_1^{(n-1)}(t+\tau - T_{(0)}^{(j)})} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{N_{(0)}(t+\tau)}{\prod_{j=N_{(0)}(t)+1}^{N_{(0)}(t+\tau)}} \sigma^{Z_1^{(n-1)}(t+\tau - T_{(0)}^{(j)})} / L_{(0)} = y \right]$$

$$= \int_0^{\infty} dG_0(y) E \left[\exp \left\{ \int_0^t \log F_1^{(n-1)}(s, \sigma; t-u, \tau) dN_{\sigma}(u) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \int_t^{t+\tau} \log F_1^{(n-1)}(\sigma, t+\tau-v) dN_{\sigma}(v) \right\} / L_{\sigma} = y \right] .$$

dann folgt mit dem bedingten WE-Funktional $H_{i,y}$ aus Definition 4.2 und der obigen abgekürzten Schreibweise das System (7.18) .

(b) Die Formeln (7.19) erhält man ebenfalls aus (7.8) und (7.9) , indem man bezüglich $\sigma_{\langle i \rangle}$ bedingt. Vgl. (4.10) und den Nachweis von (4.9) im Beweis von Satz 4.4 .

(c) folgt sofort, wenn man die Iterationen in (b) ausführt. □

Bemerkung 7.1 : Spezialisiert man (7.15) für den Crump-Mode-Jagers Prozess, so erhält man (7.4); genauso folgt aus (7.20) im Spezialfall des Crump-Mode-Jagers Prozesses die Formel (8.5.10) von Jagers [19] für die zweiten Momente der Generationsgrößen zur Zeit t. Weitere Spezialisierungen in Lemma 7.1 und 7.2 liefern dann auch die bekannten Ergebnisse beim Bellman-HarrisProzess.

Exkurs

Neben der Anzahl $Z_i^{(n)}(t)$ von Individuen, die zur Zeit t in der

n-ten Populationsgeneration leben, kann man auch

$B_i^{(n)}(t)$ = Anzahl von Individuen in der n-ten Populationsgeneration,

die bis zur Zeit t geboren wurden, oder

$D_i^{(n)}(t)$ = Anzahl von Individuen in der n-ten Populationsgeneration,

die bis zur Zeit t gestorben sind, untersuchen.

Außerdem kann man in Analogie zu $Z_i^{(n)}(t) := \sum_{j=0}^{n-1} Z_i^{\langle j \rangle}(t)$ auch $B_i^{(n)}(t) := \sum_{j=0}^{n-1} B_i^{\langle j \rangle}(t)$ und $D_i^{(n)}(t) := \sum_{j=0}^{n-1} D_i^{\langle j \rangle}(t)$ definieren,

$n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$.

In diesem Exkurs wollen wir in einem Matrixschema die Beziehungen zwischen diesen ZV beschreiben und in einer zusammenfassenden Darstellung das System von Integralgleichungen für die WEF und die Erwartungswerte aller dieser ZV angeben.

Sei für $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ $z_{jk,lm}^{(n)}(t)$ das Element in der (jk) -ten Zeile und der (lm) -ten Spalte der folgenden Matrix:

Tabelle (7.22) :

$jk \backslash lm$	00	01	10	11
00	0	$D_i^{(n)}$	$Z_i^{(n)}$	$B_i^{(n)}$
01	$D_i^{\langle n \rangle}$	$D_i^{(n+1)}$	$D_i^{\langle n \rangle} + Z_i^{(n)}$	$D_i^{\langle n \rangle} + B_i^{(n)}$
10	$Z_i^{\langle n \rangle}$	$Z_i^{\langle n \rangle} + D_i^{(n)}$	$Z_i^{(n+1)}$	$Z_i^{\langle n \rangle} + B_i^{(n)}$
11	$B_i^{\langle n \rangle}$	$B_i^{\langle n \rangle} + D_i^{(n)}$	$B_i^{\langle n \rangle} + Z_i^{(n)}$	$B_i^{(n+1)}$

Setzt man sinngemäß $D_i^{(0)} = Z_i^{(0)} = B_i^{(0)} = 0$, sieht man, daß für $n \in \mathbb{N}_0$ die ZV in der gestrichelten Untermatrix gerade die Summen ihrer Randvariablen sind.

Setzt man $a_p(s) := b_p(s) := c_p(s) := d_p(s) := s^p$ für $p = 0, 1$,

$${}_{jk,lm} F_{i,n}(s,t) := E \left[s^{jk,lm} Z_{i,n}(t) \right],$$

$${}_{jk,lm} M_{i,n}(t) := E \left[{}_{jk,lm} Z_{i,n}(t) \right]$$

für $j,k,l,m = 0,1$, $n, i \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$,

dann erfüllen die WEF das System

$$\begin{aligned} {}_{jk,lm} F_{i,0}(s,t) &= a_j(s)(1-G_i(t)) + b_k(s) G_i(t) \\ (7.23) \quad {}_{jk,lm} F_{i,n}(s,t) &= c_l(s) \int_{t+}^{\infty} H_{i,y}({}_{jk,lm} \hat{F}_{i+1,n-1}(s,t-)) dG_i(y) \\ &\quad + d_m(s) \int_{0-}^{t+} H_{i,y}({}_{jk,lm} \hat{F}_{i+1,n-1}(s,t-)) dG_i(y); \end{aligned}$$

und die Erwartungswerte erfüllen das System

$$\begin{aligned} {}_{jk,lm} M_{i,0}(t) &= a_j^i(1)(1-G_i(t)) + b_k^i(1) G_i(t) \\ (7.24) \quad {}_{jk,lm} M_{i,n}(t) &= c_l^i(1)(1-G_i(t)) + d_m^i(1) G_i(t) \\ &\quad + \int_0^t {}_{jk,lm} M_{i+1,n-1}(t-u) dF_i(u) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$, wenn man die $\hat{F}$ wie gewohnt definiert.

Bemerkung 7.2 : Die Integralgleichungssysteme für die WEF und Momente der ZV in Tabelle (7.22) sind sich also so ähnlich, daß man Ergebnisse für eine ZV aus (7.22) leicht zu Ergebnissen für alle anderen erweitern kann.

§ 8 Das Aussterben der Populationsgenerationen bei Bellman-Harris Prozessen mit exponentiellen Lebensdauern

Für das in 7.1 angesprochene Problem IV, das asymptotische Verhalten des Schwanzes der Verteilung des Aussterbezeitpunkts einer bestimmten Generation zu bestimmen, scheint der Rahmen des Crump-Mode-Jagers Prozesses zu allgemein zu sein; jedenfalls konnten mit Hilfe der WEF nur für den Bellman-Harris Prozess mit exponentiell verteilten Lebensdauern befriedigende Ergebnisse gefunden werden.

8.1 Der generationsabhängige Bellman-Harris Prozess

Für diesen Abschnitt sei stets vorausgesetzt:

$$(8.1) \left\{ \begin{array}{l} \{Z_i(t), t \geq 0\} \text{ ist ein generationsabhängiger Bellman-Harris} \\ \text{Prozess wie er in 6.2 definiert wurde, } i \in \mathbb{N}_0; \\ \\ G_k(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda_k t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \\ \\ \text{ist die VF der Lebensdauer von Individuen der } k\text{-ten} \\ \text{Generation mit } 0 < \lambda_k \leq \bar{\lambda} < \infty ; \\ \\ h_k''(1) \leq m_2 < \infty, 0 < m_k := h_k'(1) ; \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 . \end{array} \right.$$

Wenn (8.1) erfüllt ist, gelten die Voraussetzungen B und C .

Bemerkung 8.1 :

- a) Die Folge $\{\lambda_k\}$ der Parameter der Lebensdauervertreibungen spielt im folgenden eine wichtige Rolle. Insbesondere interessiert uns ihre genaue Wachstumsstruktur, wenn sie monoton fallend ist, d.h. wenn $\lambda_k \gg \lambda_{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Eine monoton fallende reelle Zahlenfolge $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ kann umkehrbar eindeutig durch ein Tripel $(\{h_n\}, \{l_n\}, \{\lambda_{h_n}\}; n \in \mathbb{N}_0)$ beschrieben werden. Dabei ist $\{\lambda_{h_n}\}$ eine streng monoton fallende Teilfolge von $\{\lambda_k\}$ und $\{h_n\}$ und $\{l_n\}$ sind Folgen natürlicher Zahlen.

Man setzt dazu $h_0 := 0$, $l_0 :=$ Anzahl der Folgenglieder, die gleich λ_0 sind, $h_1 := l_0 \dots$. Allgemein für $n \in \mathbb{N}$: $h_n := \sum_{j=0}^n l_j$ und $l_n :=$ Anzahl der Folgenglieder, die gleich $\{\lambda_{h_n}\}$ sind. Dadurch ist eindeutig ein Tripel $(\{h_n\}, \{l_n\}, \{\lambda_{h_n}\}; n \in \mathbb{N}_0)$ festgelegt.

Man erhält also $\{\lambda_{h_n}\}$ aus $\{\lambda_k\}$, indem man immer nur das erste von aufeinanderfolgenden gleichen Folgengliedern herausnimmt. Umgekehrt bestimmt ein solches Tripel auch genau eine monoton fallende Folge.

- b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $N_k \gg 0$ die Nummer des Abschnitts gleicher Folgenglieder, zu dem λ_k gehört (Beginn mit dem 0-ten Abschnitt !) :

$$h_{N_k} \leq k < h_{N_k} + 1 .$$

Weiter sei L_k bzw. R_k gleich der Anzahl der vor bzw. nach λ_k stehenden Folgenglieder, die gleich λ_k sind . Dann ist also

$$0 \leq L_k, R_k \leq l_{N_k} - 1$$

und das Teilstück, in dem λ_k liegt hat das Aussehen

$$\dots > \lambda_{k-L_k} = \dots = \lambda_k = \dots = \lambda_{k+R_k} > \dots ;$$

dies sind l_{N_k} Folgenglieder, die alle gleich $\lambda_{h_{N_k}}$ sind.

c) Betrachte einen festen Folgenabschnitt

$$(+)\quad \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \lambda_{i+k-1} \geq \lambda_{i+k} \quad i \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}.$$

Ist $N_{i+k} = N_i$, sind alle λ 's in (+) gleich.

Ansonsten ist $N_{i+k} > N_i$ und

(+) beginnt mit einem Teil des N_i -ten Abschnitts (Genau die R_i+1 ersten Glieder von (+) sind aus dem N_i -ten Abschnitt und alle sind gleich $\lambda_i = \lambda_{h_{N_i}}$) und

(+) endet mit einem Teil des N_{i+k} -ten Abschnitts (Genau die $L_{i+k}+1$ letzten Glieder von (+) sind aus den N_{i+k} -ten Abschnitt und alle sind gleich $\lambda_{i+k} = \lambda_{h_{N_{i+k}}}$).

Ist $N_{i+k} = N_i+1$, besteht (+) aus genau zwei "Randstücken";

$\lambda_{h_{N_i} + l_{N_i}}$ liegt in (+) und $\lambda_i = \dots = \lambda_{h_{N_i} + l_{N_i}} > \lambda_{h_{N_i} + 1} = \dots = \lambda_{i+k}$.

Ist $N_{i+k} > N_i+1$, liegen die Abschnitte mit den Nummern

$j = N_i+1, \dots, N_{i+k}-1$ zwischen den beiden Randstücken, sie haben jeweils die "Länge" l_j und ihre Glieder haben den Wert λ_{h_j} .

Im allgemeinen kann man (+) also in $N_{i+k} - N_i + 1$ Teilabschnitte wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
 (++) \quad & \underbrace{\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{h_{N_i} + 1}}_{R_{i,k}} > \underbrace{\lambda_{h_{N_i} + 1} = \dots = \lambda_{h_{N_i} + 2 - 1}}_{1_{N_i+1}} > \dots \\
 & \dots > \underbrace{\lambda_{h_{N_{i+k}}} = \dots = \lambda_{i+k}}_{\bar{T}_{i,k}}
 \end{aligned}$$

dabei sei $\bar{T}_{i,k} \leq L_{i+k}$ bzw. $R_{i,k} \leq R_i$ die Anzahl der vor λ_{i+k} bzw. nach λ_i kommenden Folgenglieder die gleich λ_{i+k} bzw. gleich λ_i sind und in (+) überhaupt vorkommen.

Dann gilt für die WEF der Populationsgenerationsgröße $Z_i^{(k)}(t)$

Satz 8.1 : Sei für festes $i \in \mathbb{N}_0$ $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ ein generationsabhängiger Bellman-Harris Prozess mit den Voraussetzungen (8.1); sei $\{\lambda_\nu: \nu = i, i+1, \dots\}$ eine monoton fallende Folge von positiven Parametern der Lebensdauerverteilungen.

Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in [0,1]$, $t \geq 0$ mit den Bezeichnungen von

Bemerkung 8.1

$$(8.2) \quad F_i^{(k)}(s,t) = 1 - (1-s) D_{i,k} t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t} (1 + \rho_{i,k}(s,t))$$

mit

$$(8.3) \quad T_{i,k} := \left\| \left(j \in \{i, i+1, \dots, i+k-1\} / \lambda_j = \lambda_{i+k} \right) \right\|,$$

$$(8.4) \quad D_{i,k} := \prod_{j=i}^{i+k-1} (m_j \lambda_j) \left\{ T_{i,k} ! \prod_{\substack{p=i \\ \lambda_p \neq \lambda_{i+k}}}^{i+k-1} (\lambda_p - \lambda_{i+k}) \right\}^{-1}$$

und $\rho_{i,k}(s,t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ für $s \in [0,1]$.

Bemerkung zum Beweis : Da der Beweis dieses Satzes sehr umfangreich ist, bringen wir ihn gesondert in 8.3 und

leiten in diesem Abschnitt nur die Folgerungen aus Satz 8.1 her.

$\langle k \rangle$
 $Z_i(t)$ wird durch die Generationen mit den Nummern $i, i+1, \dots, i+k$

bestimmt. Folglich geht in $F_i(s, t)$ genau der Abschnitt $(+) \lambda_i \gg$

$\lambda_{i+1} \gg \dots \gg \lambda_{i+k}$ der Parameterfolge $\{\lambda_v\}$ ein. Wir gliedern in 8.3 den

Beweis in einige Lemmata auf und zeigen dabei in Lemma 8.5 und 8.6 in 8.3,

wie man $F_j^{(n)}$ aus $F_{j+1}^{(n-1)}$ erhält. Dieses Ergebnis wenden wir dann an,

um $F_i^{(k)}$ schrittweise aus $F_{i+k}^{(0)}$ herzuleiten:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \langle k \rangle & \langle k-1 \rangle & \langle k-2 \rangle & & \langle 1 \rangle & \langle 0 \rangle & \\
 F_i & \leftarrow F_{i+1} & \leftarrow F_{i+2} & \leftarrow \dots & \leftarrow F_{i+k-1} & \leftarrow F_{i+k} & \leftarrow \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \lambda_i & \lambda_{i+1} & \lambda_{i+2} & & \lambda_{i+k-2} & \lambda_{i+k-1} & \lambda_{i+k}
 \end{array}$$

dabei kommt bei jedem Schritt von rechts nach links ein Folgenglied von $(+)$ wie eingezeichnet hinzu.

Für das asymptotische Verhalten der gemeinsamen Verteilung zweier Populationsgenerationsgrößen aus der gleichen Generation zu zwei verschiedenen Zeiten, die aber asymptotisch einen festen Zeitabstand haben, gilt ein entsprechender Satz, den wir wegen seiner Ähnlichkeit mit Satz 8.1 an diese Stelle setzen, obwohl er erst im § 9 benötigt wird.

Satz 8.2 : Sei für festes $i \in \mathbb{N}_0$ $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ ein generationsabhängiger Bellman-Harris Prozess mit den gleichen Voraussetzungen wie Satz 8.1 .

Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_0, s, \sigma \in [0, 1], t, \tau \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \langle k \rangle \\
 F_i(s, \sigma; t, \tau) &= 1 - D_{i,k} \left[s(1-\sigma) e^{-\lambda_{i+k}\tau} + 1-s \right] e^{-\lambda_{i+k}t} t^{T_{i,k}} \\
 &\quad (1 + G_{i,k}(s, \sigma; t, \tau))
 \end{aligned}$$

mit $T_{i,k}$ und $D_{i,k}$ aus (8.3) und (8.4) und

$$g_{i,k}(s, \tau; t, \tau) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{für } s, \tau \in [0,1], \tau > 0.$$

Den Beweis bringen wir ebenfalls erst in 8.3.

Bemerkung 8.2 :

1. Da bei der Populationsentwicklung, die zu $Z_i^{<k>}(t)$ führt, nur der Abschnitt (+) benötigt wird, genügt es, für Satz 8.1 und 8.2 monotones Fallen nur für (+) zu fordern.
2. Man kann die Voraussetzung über das Verhalten der mittleren Lebensdauer $1/\lambda_j$, $j = i, \dots, i+k$, noch etwas allgemeiner fassen:
 - a) Wenn statt $\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}$ monoton fallend, lediglich

$$\lambda_{i+k} = \min\{\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}\} \quad \text{gilt,}$$

bleibt Satz 8.1 gültig, da man den Beweis in 8.3 sofort auf diesen Fall anwenden kann. Wichtig ist nur, daß die "letzte" mittlere Lebensdauer $1/\lambda_{i+k}$ die "vorhergegangenen" echt übertrifft.

- b) Wenn $\lambda_i = \min\{\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}\}$, erhält man für $t \rightarrow \infty$

$$F_i^{<k>}(s, t) = 1 - e^{-\lambda_i t} \{ p_1(1-s, t) + G_1(s, t) \}$$

mit einem Polynom p_1 in $1-s$ und t und $G_1(s, t)$ nach der Vereinbarung in 8.3. p_1 ist in t höchstens vom Grad $\#(j \in \{i, \dots, i+k-1\} / \lambda_j = \lambda_i)$ und in $(1-s)$ von einem Grad größer 1; es können beliebig hohe $(1-s)$ -Potenzen auftreten. Dies hängt stark von der speziellen Nachkommensverteilung ab.

- c) Ist im allgemeinen Fall $\lambda_j = \min\{\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}\}$, $j \neq i, i+k$, erhält man

$$F_i^{\langle k \rangle}(s, t) = 1 - e^{-\lambda_j t} \left\{ p_2(1-s, t) + G_2(s, t) \right\} \text{ für } t \rightarrow \infty$$

wobei p_2 in $(1-s)$ wieder von einem Grad größer 1 ist und G_2 wie in der Vereinbarung in 8.3 .

Eine Berechnung der Polynome p_1 und p_2 wird selbst für einfache Nachkommensverteilungen und kurze Folgen $\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}$ sehr aufwendig und schwierig.

Korollar 8.1 : Gelten die Voraussetzungen (8.1) und ist (+) monoton fallend oder gilt nur $\lambda_{i+k} = \min\{\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}\}$, folgt aus Satz 8.1 für $t \rightarrow \infty$

$$(8.5) \quad P(V_i^{\langle k \rangle} > t) = D_{i,k} t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t} + o(t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t}) .$$

Beweis :
$$F_i^{\langle k \rangle}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_i^{\langle k \rangle}(t) = n) s^n ,$$

$$P(V_i^{\langle k \rangle} \leq t) = P(\text{die } k\text{-te Populationsgeneration ist zur Zeit } t \text{ ausgestorben})$$

$$(8.6) \quad = P(Z_i^{\langle k \rangle}(t) = 0) .$$

Dies ergibt zusammen mit (8.2) die Behauptung (8.5). □

Auf dieselbe Weise folgt aus (8.2)

$$P(Z_i^{\langle k \rangle}(t) = 1) = P(\text{zur Zeit } t \text{ lebt genau ein Individuum der } k\text{-ten Populationsgeneration})$$

$$(8.7) \quad = D_{i,k} t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t} + o(t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t}) ,$$

$$P(Z_i^{\langle k \rangle}(t) \geq 2) = P(\text{zur Zeit } t \text{ leben mehr als ein Individuum der } k\text{-ten Populationsgeneration})$$

$$= o(t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty .$$

Interpretation : Die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als ein Individuum der k-ten Populationsgeneration zur Zeit t noch da ist, geht schneller gegen 0 für $t \rightarrow \infty$ als die W, daß noch genau eines da ist; d.h. unter den genannten Voraussetzungen lebt in einer Populationsgeneration asymptotisch zuletzt nur noch ein Individuum und mit diesem stirbt diese Generation vollends aus.

Ein einfaches Beispiel, welches gleichzeitig 2. b) in Bemerkung 8.2 illustriert, zeigt, daß sich das eben beschriebene Verhalten der Populationsgenerationsgröße $Z_i^{(k)}(t)$ ändert, wenn

$$\lambda_{i+k} > \min \{ \lambda_i, \dots, \lambda_{i+k} \}.$$

Betrachten wir einen generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess unter den Voraussetzungen (8.1) mit $\lambda_{i+1} > \lambda_i$ für ein festes $i \in \mathbb{N}_0$ und mit einer speziellen Nachkommensverteilung gegeben durch $h_k(s) \neq h(s) = 1-a + as^2 = 1 - 2a(1-s) + a(1-s)^2$, für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < a < 1$, dann ist nach Lemma 8.1 in 8.3

$$F_{i+1}^{(0)}(s, t) = 1 - (1-s) \exp(-\lambda_{i+1}t),$$

$$F_i^{(1)}(s, t) = e^{-\lambda_i t} + \lambda_i \int_0^t \{ 1 - 2a(1-F_{i+1}^{(0)}(s, t-u)) + a(1-F_{i+1}^{(0)}(s, t-u))^2 \} e^{-\lambda_i u} du$$

$$= 1 - 2a(1-s)\lambda_i \int_0^t \exp(\lambda_{i+1}(t-u)) \exp(-\lambda_i u) du \\ + a\lambda_i(1-s)^2 \int_0^t \exp(-2\lambda_{i+1}(t-u)) \exp(-\lambda_i u) du$$

$$= 1 - 2a(1-s)\lambda_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{-1} e^{-\lambda_i t} (1 - e^{-(\lambda_{i+1} - \lambda_i)t})$$

$$+ a(1-s)^2 \lambda_i (2\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{-1} \cdot e^{-\lambda_i t} (1 - e^{-(2\lambda_{i+1} - \lambda_i)t})$$

$$+ a(1-s)^2 \lambda_i (2\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{-1} e^{-\lambda_i t} (1 - e^{-(2\lambda_{i+1} - \lambda_i)t})$$

$$= p_{i,0}(t) + p_{i,1}(t) s + p_{i,2}(t) s^2$$

und für $t \rightarrow \infty$ gehen für $r = 1, 2$

$$p_{i,r}(t) = A_{i,r} \exp(-\lambda_i t) + o(\exp(-\lambda_i t))$$

von der gleichen Größenordnung gegen Null.

Wenn also bei zwei aufeinanderfolgenden Generationen die mittlere Lebensdauer in der späteren Generation die der früheren unterschreitet, "verschwinden asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ alle Individuen der späteren Generation mit der gleichen Ordnung".

Für streng monoton fallende Folgen $\{\lambda_n\}$ ist $T_{i,k} = 0$; für konstante Folgen ist $T_{i,k} = k$. Somit vereinfacht sich in diesen beiden Fällen das Korollar 8.1 zu

Korollar 8.2 : Sei $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ ein generationsabhängiger Bellman-Harris Prozess mit (8.1) und es sei

$$\lambda_i > \lambda_{i+1} > \dots > \lambda_{i+k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ fest.}$$

Dann gilt für $t \rightarrow \infty$

$$(8.8) \quad P(\langle k \rangle V_i > t) = \left[\prod_{j=i}^{i+k-1} m_j \lambda_j / (\lambda_j - \lambda_{i+k}) \right] \exp(-\lambda_{i+k} t) + o(\exp(-\lambda_{i+k} t)).$$

und zu

Korollar 8.3 : Sei $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ ein generationsabhängiger Bellman-Harris Prozess. Nur die Nachkommensverteilung sei generationsabhängig und gegeben durch ihre WEF $h_j(s)$ mit $m_j := h_j'(1)$ und $h_j''(1) \leq m_2 < \infty$ für $j \geq i$. Jedes Individuum habe eine mit Parameter $\lambda > 0$ exponential verteilte Lebensdauer.

Dann gilt für $t \rightarrow \infty$

$$(8.9) \quad P(V_i^{(k)} > t) = \frac{1}{k!} \lambda^k \left(\prod_{j=i}^{i+k-1} m_j \right) t^k e^{-\lambda t} + o(t^k e^{-\lambda t}) .$$

Auf den von Fildes [14], s. Bemerkung 6.4 (a), betrachteten generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess, bei dem nur die Lebensdauern variieren, kann man Korollar 8.1 ebenfalls anwenden, ohne daß sich allerdings viel vereinfacht, da nur

$$\prod_{j=i}^{i+k-1} m_j \text{ zu } m^k \text{ wird.}$$

Hat man in Korollar 8.3 zusätzlich $m_j = m$ für alle j , ist (8.9) ein Ergebnis für den Markovschen Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit, den wir im folgenden Abschnitt 8.2 genauer untersuchen.

8.2 Der Markovsche Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Aussterben der Generationen beim nicht generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess mit exponentiell verteilten Lebensdauern. Dies ist dann ein Markovscher Verzweigungsprozess, s. Harris [16] Kap V und Kap VI, Theorem 11.1, und Ahlfrey-Ney [2] Kap III.

$\{Z(t)\}$, die Anzahl der Individuen in der Population zur Zeit t , ist ein Markov Prozess; dies folgt aus der Eigenschaft des "Vergessens" der Exponentialverteilung und daraus, daß bei gegebener gegenwärtiger Anzahl von Individuen in der Population die zukünftigen Anzahlen nicht davon abhängen, wieviele in der Vergangenheit lebten.

Im Gegensatz zum generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess mit exponentiell verteilten Lebensdauern: Die Eigenschaft des "Vergessens" liegt für die Lebensdauer wohl vor, aber wie sich die Anzahl der Individuen ab einem bestimmten Zeitpunkt weiterentwickelt, hängt davon ab, in welchen Generationen die zur Zeit t lebenden sind, und dies hängt von der Vergangenheit des Prozesses ab. Bei einer echt vorhandenen Generationsabhängigkeit ist also die Markov-Eigenschaft verletzt.

Der Markovsche Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit sei durch die WEF der Nachkommensverteilung $h(s)$ und die mit Parameter $\lambda > 0$ exponentiell verteilte Lebensdauer für alle Individuen gegeben.

O.B.d.A. sei $\lambda = 1$; dies entspricht lediglich einer Zeittransformation.

Ist $0 < m := h'(1)$ und $h''(1) < \infty$, folgt aus Satz 8.1 und

und Korollar 8.3 für die WEF der Größe der k -ten (Populations-) Generation für $s \in [0,1]$, $t \rightarrow \infty$

$$(8.10) \quad F^{\langle k \rangle}(s, t) = 1 - (1-s) \frac{m^k}{k!} e^{-t} t^k + o(e^{-t} t^k);$$

und für die Zeit $V^{\langle k \rangle}$ des Aussterbens der k -ten Generation

$$(8.11) \quad P(V^{\langle k \rangle} > t) = \frac{m^k}{k!} e^{-t} t^k + o(e^{-t} t^k) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

(8.11) ist gleich (7.7), dem Ergebnis von Bühler [7] für Populationen mit einer beschränkten Anzahl von Nachkommen.

Unter der stärkeren Voraussetzung, daß die Nachkommenschaft eines Individuums beschränkt ist, gibt der folgende Satz zusätzliche Information über das asymptotische Zusammenspiel der Generationsgrößen, dessen anschauliche Bedeutung über das in der Interpretation nach Korollar 8.1 gesagte hinausgeht.

Satz 8.3 : Sei $\{Z(t), t \geq 0\}$ ein Markovscher Verzweigungsprozess ;
die Lebensdauer sei exponentiell verteilt mit Parameter

$\lambda = 1$ und die Nachkommensverteilung sei gegeben durch die WEF

$$h(s) = \sum_{i=0}^n p_i s^i, \quad s \in [0,1], \quad p_n > 0, \quad n \geq 1.$$

Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in [0,1]$, $t \rightarrow \infty$

$$(8.12) \quad F^{\langle k \rangle}(s, t) = 1 - (1-s) \frac{m^k}{k!} e^{-t} t^k + \sum_{i=1}^k c_i^{\langle k \rangle}(s) t^{k-i} e^{-t} + o(\exp(-t))$$

und die $c_i^{\langle k \rangle}(s)$ sind gegeben für $i = 1$ durch

$$(8.13) \quad c_1^{\langle k \rangle}(s) := \sum_{j=2}^n (1-s)^j d_{1,j}^{\langle k \rangle} \quad \text{mit}$$

$$(8.14) \quad d_{1,j}^{\langle k \rangle} := f_j m^{k-1} (-1)^j / \left[(k-1)! j! (j-1)! \right]$$

für $j = 2, \dots, n$, $k \in \mathbb{N}$, wobei $f_j := h^{(j)}(1)$
das j -te faktorielle Moment der Nachkommensverteilung ist;

und für $i = 2, 3, \dots, k$, $k \geq 2$, durch

$$(8.15) \quad c_i^{\langle k \rangle}(s) := \sum_{j=0}^{n^i} d_{i,j}^{\langle k \rangle} s^j, \quad \text{wobei}$$

$d_{i,j}^{\langle k \rangle}$ reelle Zahlen für $j = 0, 1, \dots, n^i$ sind.

Korollar 8.4 : Aus Satz 8.3 folgt, daß bei einem Markovschen Verzweigungsprozess mit höchstens n Nachkommen pro Individuum und einer positiven Wahrscheinlichkeit für genau n Nachkommen, $n \geq 2$, asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ gilt :

$$(8.16) \quad P(Z(t) = 1) = \frac{m^k}{k!} e^{-t} t^k + o(e^{-t} t^k);$$

$$(8.17) \quad P(Z(t) = j) = A_j e^{-t} t^{k-1} + o(e^{-t} t^{k-1}), \quad j=2, \dots, n;$$

$$(8.18) \quad P(Z(t) = j) = A_{i,j} e^{-t} t^{k-i} + o(e^{-t} t^{k-i})$$

für $j = n^{i-1}+1, \dots, n^i$, $i = 2, \dots, k-1$;

mit bestimmten Zahlen A_j , $A_{i,j}$ die noch von der Nachkommensverteilung abhängen.

Interpretation : Ersetzt man in (8.18) k durch $k+i$, dann ist die W , daß in der k -ten Generation zur Zeit t noch genau ein Individuum lebt, von der gleichen Größenordnung wie die W , daß in der $k+i$ -ten Generation zur Zeit t noch n^i bis n^{i+1} Individuen leben, $i = 1, \dots, k-1$. Da ein Individuum seine Nachkommen beim Markovschen Verzweigungsprozess alle erst bei seinem Tod erzeugt, bedeutet dies, daß asymptotisch "höchstwahrscheinlich" noch genau eine Linie in der Population lebt.

Beweis von Satz 8.3 : Für $s \in [0,1]$, $t \geq 0$ haben wir nach Lemma 8.1 in 8.3

$$(8.19) \quad F^{(0)}(s,t) = 1 - (1-s) e^{-t}$$

$$(8.20) \quad F^{(k)}(s,t) = e^{-t} + \int_0^t h(F^{(k-1)}(s,t-u)) e^{-u} du, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$F^{(k)}(s,t-u) \in [0,1]$ für $0 \leq u \leq t$; und durch Umentwickeln von h in (8.20) folgt

$$\begin{aligned} (8.21) \quad F^{(k)}(s,t) &= e^{-t} + \int_0^t \sum_{i=0}^n p_i (F^{(k-1)}(s,t-u))^i e^{-u} du \\ &= e^{-t} + \int_0^t \sum_{\mu=0}^n a_{\mu} (1 - F^{(k-1)}(s,t-u))^{\mu} e^{-u} du \\ &= e^{-t} + \sum_{\mu=0}^n a_{\mu} \int_0^t (1 - F^{(k-1)}(s,t-u))^{\mu} e^{-u} du \end{aligned}$$

mit $a_{\mu} = f_{\mu}(-1)^{\mu} / \mu!$ für $\mu = 1, \dots, n$, $a_0 = 1$ und

mit den faktoriellen Momenten f_{μ} von h .

Für $n = 1$ und $h(s) = p_0 + p_1 s$, $p_1 > 0$, ist $Z^{\langle k \rangle}(t)$ gleich 0 oder 1 für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und man zeigt leicht durch vollständige Induktion mit Hilfe von (8.19.) und (8.20)

$$F^{\langle k \rangle}(s, t) = 1 - (1-s) \exp(-t) t^k m^k / k! \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dies steht in Einklang mit (8.12) - (8.15), da man $d_{i,j}^{\langle k \rangle} = 0$ setzen kann.

Für $n \geq 2$ und $k = 0$ ist $c_i^{\langle k \rangle}(s)$ in (8.13) und (8.15) nicht definiert und in (8.12) tritt die Summe nicht auf. Setzt man den 0-Term identisch gleich 0, folgt die Behauptung aus (8.19).

Für $n \geq 2$ und $k \geq 1$ beweisen wir die Behauptung des Satzes mit dem folgenden etwas stärkeren Lemma, dessen Behauptung für eine vollständige Induktion besser geeignet ist.

Lemma : Es gelten die Voraussetzungen von Satz 8.3. Es sei für $k \in \mathbb{N}$

$$N(k) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}_0^2 : 2 \leq x \leq n^k, 0 \leq y \leq k n^{k-1} \right\}$$

Dann gilt für $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$(8.22) \quad F^{\langle k \rangle}(s, t) = 1 - b_k(s) e^{-t} t^k + \sum_{i=1}^k c_i^{\langle k \rangle}(s) e^{-t} t^{k-i} + \sum_{(p, \nu) \in N(k)} c_{p, \nu}^{\langle k \rangle}(s) e^{-s t} t^{\nu},$$

wobei $c_i^{\langle k \rangle}(s)$ Polynome in s von Grad $\leq n^i$ für $i = 1, \dots, k$,

$c_{p, \nu}^{\langle k \rangle}(s)$ Polynome in s vom Grad $\leq n^k$,

$b_k(s) := (1-s) m^k / k!$ und

$$(8.23) \quad c_1^{(k)}(s) := \sum_{j=2}^n (1-s)^j \frac{m^{k-1} (-1)^j f_j}{(k-1)! j! (j-1)!} \text{ sind.}$$

Beweis des Lemmas :

Für den Induktionsanfang setzen wir $F^{(0)}(s, t-u)$ aus (8.19) in (8.21)

für $k = 1$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} (8.24) \quad F^{(1)}(s, t) &= e^{-t} + \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \int_0^t (1-s)^{\ell} e^{-\ell(t-u)} e^{-u} du \\ &= e^{-t} + a_0 (1 - e^{-t}) - m(1-s) e^{-t} t \\ &\quad + \sum_{\ell=2}^n a_{\ell} (1-s)^{\ell} e^{-\ell t} (e^{(\ell-1)t} - 1) / (\ell-1) \\ &= 1 - m(1-s) e^{-t} t + c_1^{(1)}(s) e^{-t} \\ &\quad + \sum_{\ell=2}^n a_{\ell} (1-s)^{\ell} e^{-\ell t} / (\ell-1) \end{aligned}$$

mit $c_1^{(1)}(s)$ aus (8.23) .

Setzt man $c_{\vartheta 0}^{(1)}(s) = a_{\vartheta} (1-s)^{\vartheta} / (\vartheta-1)$ und $c_{\vartheta 1}^{(1)}(s) = 0$ für $\vartheta = 2, \dots, n$, erfüllt $F^{(1)}(s, t)$ (8.22) und die nachfolgenden Bedingungen.

Für den Induktionsschritt definieren wir zunächst Vektoren von ganzen nicht negativen Zahlen und Funktionen derselben:

$$\ell := (i_{1,0}, \dots, i_{1,k}; i_{2,0}, \dots, i_{2, kn^{k-1}}; \dots$$

$$\dots; i_{n^k, 0}, \dots, i_{n^k, kn^{k-1}}),$$

$$\ell! := i_{1,0}! \dots i_{1,k}! i_{2,0}! \dots i_{2, kn^{k-1}}! \dots$$

$$\dots i_{n^k}! \dots i_{n^k, kn^{k-1}}!$$

$$I_{\mu} := \{ \ell : 0 \leq i_{g,v} \leq \mu, g=1, v=0,1,\dots,k \text{ oder } (g,v) \in N(k) \},$$

$$\sum(\ell) := \sum_{j=0}^k i_{1,j} + \sum_{(g,v) \in N(k)} i_{g,v}, \quad G(\ell) := (-1)^{\sum(\ell)} i_{1,0},$$

$$m(\ell) := \sum_{j=0}^k i_{1,j} + \sum_{(g,v) \in N(k)} g i_{g,v},$$

$$n(\ell) := \sum_{j=0}^k i_{1,j} (k-j) + \sum_{(g,v) \in N(k)} v i_{g,v}$$

$$\text{für } \ell \in I_{\mu}, \mu = 2, \dots, n.$$

$$\text{Dann ist für } \mu = 2, \dots, n$$

$$(8.25) \quad \begin{aligned} 2 &\leq m(\ell) \leq n^{k+1}, \\ 0 &\leq n(\ell) \leq kn^k \end{aligned} \quad \text{für } \ell \in I_{\mu}$$

und durch polynomiales Ausmultiplizieren erhält man aus der Induktionsannahme für k

$$(8.26) \quad (1 - F^{\langle k \rangle}(s, t-u))^{\mu} =$$

$$= \left[b_k(s) e^{-t/k} - \sum_{j=1}^k c_j^{\langle k \rangle}(s) e^{-(t-u)} (t-u)^j - \sum_{(g,v) \in N(k)} c_{g,v}^{\langle k \rangle}(s) e^{-g(t-u)} (t-u)^v \right]^{\mu}$$

$$= \sum_{\ell \in I_{\mu}, \sum \ell = \mu} c^{\langle k \rangle}_{(s, \ell)} e^{-m(\ell)(t-u)} (t-u)^{n(\ell)}$$

$$\text{mit } c^{\langle k \rangle}_{(s, \ell)} := G(\ell) \frac{\mu!}{\ell!} b_k(s)^{i_1, 0} \prod_{j=1}^k c_j^{\langle k \rangle}(s)^{i_{1, j}} \prod_{(\rho, \nu) \in N(k)} c_{\rho, \nu}^{\langle k \rangle}(s)^{i_{\rho, \nu}}$$

Setzt man (8.26) in (8.21) für $k+1$ ein, erhält man

$$\begin{aligned} (8.27) \quad F^{\langle k+1 \rangle}(s, t) &= \\ &= e^{-t} + \int_0^t a_0 e^{-u} du - m \int_0^t (1 - F^{\langle k \rangle}(s, t-u)) e^{-u} du \\ &\quad \sum_{\mu=2}^n a_{\mu} \int_0^t \sum_{\ell \in I_{\mu}, \sum \ell = \mu} c^{\langle k \rangle}_{(s, \ell)} e^{-m(\ell)(t-u)} (t-u)^{n(\ell)} e^{-u} du \\ &= 1 - m b_k(s)(k+1) e^{-t} t^{k+1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k c_j^{\langle k \rangle}(s) \frac{m}{k-j+1} e^{-t} t^{k-j+1} \\ (S_1) \quad &+ \sum_{(\rho, \nu) \in N(k)} c_{\rho, \nu}^{\langle k \rangle}(s) e^{-t} \int_0^t e^{-(\rho-1)(t-u)} (t-u)^{\nu} du \\ (S_2) \quad &+ \sum_{\mu=2}^n a_{\mu} \sum_{\ell \in I_{\mu}, \sum \ell = \mu} c^{\langle k \rangle}_{(s, \ell)} e^{-t} \int_0^t e^{-(m(\ell)-1)(t-u)} (t-u)^{n(\ell)} du. \end{aligned}$$

Nach (8.25) ist $m(\ell) - 1 \gg 1$, $n(\ell) \gg 0$.

Man kann mit Lemma 8.3 aus 8.3 die Integrale auf der rechten Seite oben ausrechnen und unter Verwendung von (8.25) werden die beiden Summen

S_1 und S_2 gleich

$$c_{k+1}^{\langle k+1 \rangle}(s) e^{-t} + \sum_{(\rho, \nu) \in N(k+1)} c_{\rho, \nu}^{\langle k+1 \rangle}(s) e^{-\rho t} t^{\nu}$$

mit bestimmten Funktionen $c_{k+1}^{\langle k+1 \rangle}(s)$, $c_{\rho, \nu}^{\langle k+1 \rangle}(s)$ für $(\rho, \nu) \in N(k+1)$, die noch von $c_i^{\langle k \rangle}(s)$, $c_{\rho, \nu}^{\langle k \rangle}(s)$ und $b_k(s)$ der Induktionsannahme (8.22) abhängen können. Wichtig bei der Integration und anschließenden Umordnung der endlichen Summen ist nur, daß t^p -Potenzen mit $p \geq 1$ nur bei e^{-2t} , e^{-3t} , ... auftreten. $c_{k+1}^{\langle k+1 \rangle}(s)$ und $c_{\rho, \nu}^{\langle k+1 \rangle}(s)$ sind Polynome in s vom Grad nicht größer als n^{k+1} ; denn ausgehend von $h(s)$, einem Polynom vom Grad n , hat man nach $k+1$ -maligem Anwenden von (8.20) ein Polynom vom Grad höchstens gleich n^{k+1} (oder anschaulich argumentiert: wenn höchstens n Nachkommen pro Individuum geboren werden, hat man nach $k+1$ Generationen höchstens n^{k+1} Individuen.).

Setze nun

$$b_{k+1}(s) := (1-s) m^{k+1} / (k+1)! ,$$

$$c_j^{\langle k+1 \rangle}(s) := c_j^{\langle k \rangle}(s) m / (k-j+1) , j = 1, 2, \dots, k$$

dann ist $c_j^{\langle k+1 \rangle}(s)$ wieder ein Polynom vom Grad nicht größer als n^j und $F^{\langle k+1 \rangle}(s, t)$ aus (8.27) erfüllt (8.22) mit den nachfolgenden Bedingungen für $k+1$. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas durch vollständige Induktion. □

Zum Schluß des Beweises von Satz 8.3 bemerken wir nur, daß

$$\sum_{(\rho, \nu) \in N(k)} c_{\rho, \nu}^{\langle k \rangle}(s) e^{-\rho t} t^\nu = o(e^{-t}) \text{ ist, denn aus } (\rho, \nu) \in N(k)$$

folgt $\rho \geq 2$ und $c_i^{\langle k \rangle}(s)$ ist für $i = 2, \dots, k$ eine bestimmte Potenzreihe in s , für deren Koeffizienten wir allerdings keine explizite Formel angeben können. □

Bemerkung 8.3 : Ist die Anzahl der Nachkommen eines Individuums nicht mehr beschränkt, können wir ein entsprechendes Ergebnis nur unter starken Voraussetzungen an die Nachkommensverteilung zeigen:

Ist $h(s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (s-1)^r$ absolut und gleichmäßig konvergent für $s \in [0,1]$, $a_r = f_r / r!$, f_r das r -te faktorielle Moment der Nachkommensverteilung, dann gilt für $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0,1]$, $t \rightarrow \infty$

$$(8.28) \quad \begin{aligned} \langle k \rangle \\ F(s, t) = 1 - (1-s) e^{-t} \frac{t^k}{k!} \\ + e^{-t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{r=2}^{\infty} (1-s)^r a_r (-1)^r (r-1)^{-1} \\ + o(e^{-t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}) \end{aligned}$$

Beweis : Wir zeigen durch Induktion die folgende Behauptung

Behauptung : Für $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0,1]$, $t \geq 0$ ist

$$F^{\langle k \rangle}(s, t) = 1 - b_k(s) e^{-t} \frac{t^k}{k!} + c^{\langle k \rangle}(s) e^{-t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + R_k(s, t) \quad \text{mit}$$

$$b_k(s) = (1-s)^k / k!$$

$$c^{\langle k \rangle}(s) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{r=2}^{\infty} a_r (s-1)^r (r-1)^{-1}$$

$$|R_k(s, t)| \leq A_k \exp(-t) t^{k-2} + B_k \exp(-t)$$

mit Zahlen A_k , B_k , die nur von $\{a_r\}$, s und k abhängen.

Beweis : Mit (8.19) und der gleichmäßigen Konvergenz folgt aus (8.20)

$$\begin{aligned}
 F^{\langle 1 \rangle}(s, t) &= e^{-t} + \int_0^t \sum_{r=0}^{\infty} a_r (F^{\langle 0 \rangle}(s, t-u) - 1)^r e^{-u} du \\
 &= e^{-t} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r (-1)^r (1-s)^r \int_0^t e^{-r(t-u)} e^{-u} du \\
 (8.29) \quad &= 1 - m(1-s)e^{-t} + \sum_{r=2}^{\infty} a_r (s-1)^r e^{-rt} (e^{(r-1)t} - 1)(r-1)^{-1} \\
 &= 1 - b_1(s)e^{-t} + c^{\langle 1 \rangle}(s) + R_1(s, t)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } |R_1(s, t)| = \left| \sum_{r=2}^{\infty} a_r (s-1)^r e^{-rt} (r-1)^{-1} \right| \leq A_1 e^{-t}.$$

Damit ist der Induktionsanfang gemacht. Der Induktionsschritt von

$k \rightarrow k+1$ folgt genau der Methode des Lemmas 8.6 in 8.3

wenn man $(1-s) a \exp(-t) t^p$ durch $b_k(s) \exp(-t) t^k + c^{\langle k \rangle}(s) \exp(-t) t^{k+1}$ ersetzt.

Damit folgt die obige Behauptung und somit auch (8.28). □

8.3 Beweis für die Sätze 8.1 und 8.2

Der Beweis von Satz 8.1 :

Lemma 8.1 : Unter den Voraussetzungen (8.1) gilt für

$$|s|, |\sigma| \leq 1, t, \tau \geq 0, i \in \mathbb{N}_0$$

$$(8.30) \quad F_i^{(0)}(s, t) = 1 - (1-s) e^{-\lambda_i t},$$

$$(8.31) \quad F_i^{(n)}(s, t) = e^{-\lambda_i t} + \int_0^t h_i(F_{i+1}^{(n-1)}(s, t-u)) \lambda_i e^{-\lambda_i u} du;$$

$$(8.32) \quad F_i^{(0)}(s, \sigma; t, \tau) = 1 - e^{-\lambda_i t} [s(1-\sigma) e^{-\lambda_i \tau} + 1-s],$$

$$(8.33) \quad F_i^{(n)}(s, \sigma; t, \tau) = e^{-\lambda_i(t+\tau)} + \\ + \int_t^{t+\tau} h_i(F_{i+1}^{(n-1)}(\sigma, t+\tau-u)) \lambda_i e^{-\lambda_i u} du \\ + \int_0^t h_i(F_{i+1}^{(n-1)}(s, \sigma; t-u, \tau)) \lambda_i e^{-\lambda_i u} du$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis :

1. Genau wie in 6.2 das System (6.7) erhält man beim generations-abhängigen Bellman-Harris Prozess die WEF der $Z_{i1}^{(k)}(t)$ aus (7.11) und (7.12). Sie nehmen dabei die folgende Gestalt an :

$$(8.34) \quad F_i^{(0)}(s, t) = 1 - (1-s)(1 - G_i(t)),$$

$$(8.35) \quad F_i^{<n>}(s, t) = 1 - G_i(t) + \int_0^t h_i(F_{i+1}^{<n-1>}(s, t-u)) dG_i(u)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Setzt man für $G_i(t)$ die entsprechenden Exponentialverteilungen aus (8.1) ein, folgen (8.30) und (8.31).

2. (8.32) und (8.33) erhält man entsprechend aus (7.17) und (7.18). □

Lemma 8.2 : Unter den Voraussetzungen (8.1) gilt für $i \in \mathbb{N}_0$

$$(8.36) \quad h_i(s) = 1 - (1-s)m_i + \frac{1}{2} (1-s)^2 R_i(s) \quad \text{für } s \in [0, 1]$$

mit $0 \leq R_i(s) \leq h_i''(1) =: \delta_i$, $R_i(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} \delta_i$ und

$R_i(s)$ ist monoton wachsend.

Beweis : Dies ist Satz 1 von Sewastjanow [33], S. 6.

Ein rein analytisches Hilfsmittel ist

Lemma 8.3 : Für $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-y)^n e^{a(t-y)} dy &= \int_0^t y^n e^{ay} dy \\ &= e^{at} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!} \frac{t^j (-1)^{n-j}}{a^{n-j+1}} + (-1)^{n+1} \frac{n!}{a^{n+1}} \\ &= \frac{n! (-1)^{n+1}}{a^{n+1}} \left\{ 1 - e^{at} \sum_{j=0}^n \frac{t^j (-a)^j}{j!} \right\}. \end{aligned}$$

Beweis : Durch partielle Integration, vgl. die Integraltafel von Dwight [10], S. 134.

Lemma 8.4 : Ist $K(x)$ eine Funktion von beschränkter totaler Variation und $b(x)$ eine auf $\mathbb{R}$ beschränkte Funktion mit $\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = \beta$,

dann gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} b(x-y) dK(y) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \beta (K(+\infty) - K(-\infty)) .$$

Beweis : Dies ist Lemma 1 von Smith [34].

Die beiden folgenden Lemmata machen den Kern des Beweises von Satz 8.1 aus. Zunächst noch eine

Vereinbarung : In den Beweisen dieses Abschnitts bezeichnen wir mit

$A_1, B_1, A_{1,m}, B_{1,m}$ nichtnegative reelle Zahlen, die nicht mehr von t , aber noch von τ, s, σ, j, n abhängen;
 $G_1(t), G_1(s, t),$ reellwertige Funktionen, die für $t \geq 0$ betragsmäßig durch eine von t unabhängige Konstante, die von den anderen Parametern noch abhängen darf, abgeschätzt werden können, und die für $t \rightarrow \infty$ für alle Werte der übrigen Parameter gegen 0 konvergieren.
 $\bar{G}_1(t), \bar{G}_1(s, t),$
 $G_1(s, \sigma; t, \tau)$

Lemma 8.5 : Es sei (8.1) vorausgesetzt, $n \in \mathbb{N}$, $j, p \in \mathbb{N}_0$, $0 < \lambda < \lambda_j$.

Wenn für $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$

$$(8.37) \quad F_{j+1}^{(n-1)}(s, t) = 1 - e^{-\lambda t} \left\{ (1-s) \sum_{r=0}^p a_r t^r + G_1(s, t) \right\}$$

mit nicht negativen reellen Zahlen a_r , $r=0, \dots, p$,

dann gilt für $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$

$$(8.38) \quad F_j^{(n)}(s, t) = 1 - e^{-\lambda t} \left\{ (1-s) \sum_{q=0}^p \bar{a}_q t^q + G_2(s, t) \right\}$$

mit

$$(8.39) \quad \bar{a}_q := m_j \lambda_j \sum_{l=q}^p a_l b_{l,q} \quad \text{für } q = 0, 1, \dots, p;$$

$$(8.40) \quad b_{l,q} := 1! (-1)^{l-q} / [q! (\lambda_j - \lambda)^{l-q+1}]$$

für $q = 0, 1, \dots, l$, $l = 0, 1, \dots, p$.

Beweis :

1.) $F_{j+1}^{(n-1)}(s, t-u) \in [0, 1]$ für $s \in [0, 1]$, $0 \leq u \leq t$, da $F_{j+1}^{(n-1)}$ eine WEF ist.

Wendet man Lemma 8.2 auf (8.37) an, folgt

$$(8.41) \quad h_j(F_{j+1}^{(n-1)}(s, t-u)) = 1 - m_j e^{-\lambda(t-u)} \left\{ (1-s) \sum_{r=0}^p a_r(t-u)^r + G_1(s, t-u) \right\} \\ + \frac{1}{2} e^{-2\lambda(t-u)} \left\{ (1-s) \sum_{r=0}^p a_r(t-u)^r + G_1(s, t-u) \right\}^2 \\ \cdot R_j(F_{j+1}^{(n-1)}(s, t-u))$$

mit $R_j(F_{j+1}^{(n-1)}(s, t-u)) \in [0, \delta_j]$; δ_j wurde in Lemma 8.2 definiert!

Setzt man (8.41) in die rechte Seite von (8.31) ein, erhält man

$$(8.42) \quad F_j^{(n)}(s, t) = 1 - (1-s)m_j \lambda_j \int_0^t \sum_{r=0}^p a_r(t-u)^r e^{-\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} du \\ + J(s, t) + K(s, t) \quad \text{mit}$$

$$(8.43) \quad J(s, t) := -A_1 \int_0^t G_1(s, t-u) e^{-\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} du$$

$$(8.44) \quad K(s, t) := A_2 \int_0^t e^{-2\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} \cdot \left\{ (1-s) \sum_{r=0}^p a_r(t-u)^r + G_1(s, t-u) \right\}^2 R_j du.$$

2.] Mit Hilfe von Lemma 8.3 folgt wegen $\lambda_j > \lambda$ für $r = 0, 1, \dots, p$

$$\begin{aligned}
 (8.45) \quad & \int_0^t (t-u)^r e^{-\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} du = \\
 & = e^{-\lambda_j t} \int_0^t y^r e^{(\lambda_j - \lambda)y} dy \\
 & = e^{-\lambda t} \left\{ \sum_{\mu=0}^r \frac{r! (-1)^{r-\mu}}{\mu! (\lambda_j - \lambda)^{r-\mu+1}} t^\mu + (-1)^{r+1} \frac{r! e^{-(\lambda_j - \lambda)t}}{(\lambda_j - \lambda)^{r+1}} \right\} \\
 & = e^{-\lambda t} \left\{ \sum_{\mu=0}^r b_{r,\mu} t^\mu + G_r(t) \right\},
 \end{aligned}$$

$b_{r,\mu}$ aus (8.39) und $G_r(t)$ nach der obigen Vereinbarung.

3.] Wegen $\lambda_j > \lambda$, $|G_1(s, t)|$ beschränkt für $t \geq 0$, $G_1(s, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ folgt aus Lemma 8.4

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t G_1(s, t-u) e^{-(\lambda_j - \lambda)u} du \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \\
 \implies & J(s, t) = e^{-\lambda t} G_3(s, t).
 \end{aligned}$$

4.] Man kann $K(s, t)$ betragsmäßig abschätzen: $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 (8.46) \quad |K(s, t)| & \leq A_3 \int_0^t e^{-2\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} G_1^2(s, t-u) du \\
 & + \sum_{r=0}^p B_r \int_0^t |G_1(s, t-u)| (t-u)^r e^{-2\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} du \\
 & + \sum_{r,q=0}^p B_{r,q} \int_0^t (t-u)^{r+q} e^{-2\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} du.
 \end{aligned}$$

$$(8.47) \quad \int_0^t e^{-2\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} du = e^{-2\lambda t} \int_0^t e^{(2\lambda - \lambda_j)u} du =$$

$$= \begin{cases} e^{-\lambda t} (2\lambda - \lambda_j)^{-1} \left[e^{-(\lambda_j - \lambda)t} - e^{-\lambda t} \right] & \text{für } 2\lambda \neq \lambda_j \\ e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda_j - \lambda)t} & \text{für } 2\lambda = \lambda_j \end{cases}$$

$$= \exp(-\lambda t) \bar{G}_1(t).$$

Da $\bar{G}_1(s, t)$ für $t \geq 0$ beschränkt ist, wird der erste Term der rechten Seite von (8.46) gleich $\exp(-\lambda t) \bar{G}_4(s, t)$.

Aus Lemma 8.3 folgt für die Integrale des zweiten Terms von (8.46)

$$(8.48) \quad \int_0^t (t-u)^r e^{-2\lambda(t-u)} e^{-\lambda_j u} du$$

$$= e^{-\lambda_j t} \int_0^t y^r e^{(\lambda_j - 2\lambda)y} dy$$

$$= \begin{cases} e^{-\lambda t} \left[e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r r! (-1)^{r-\infty}}{r! (\lambda_j - 2\lambda)^{r-\infty+1}} + \frac{r! (-1)^{r+1}}{(\lambda_j - 2\lambda)^{r+1}} \right. \\ \quad \left. \cdot \exp(-(\lambda_j - \lambda)t) \right], & \text{falls } \lambda_j \neq 2\lambda \\ e^{-\lambda t} e^{-(\lambda_j - \lambda)t} \frac{t^{r+1}}{(r+1)!}, & \text{falls } \lambda_j = 2\lambda \end{cases}$$

$$= \exp(-\lambda t) \bar{G}_2(t)$$

folglich ist der zweite Term auf der rechten Seite von (8.46)

gleich $\exp(-\lambda t) \bar{G}_5(s, t)$. Genauso zeigt man, daß der dritte Term auf der rechten Seite von (8.46) gleich $\exp(-\lambda t) \bar{G}_6(s, t)$ ist und zusammenfassend gilt dann

$$|K(s, t)| \leq \exp(-\lambda t) \bar{G}_7(s, t).$$

5.] Setzen wir die Ergebnisse von 2. - 4. in (8.42) ein und fassen

wir $(1-s) \sum_{r=0}^p G_r(t)$, $G_3(s,t)$, $G_7(s,t)$, zu $G_2(s,t)$ zusammen,

folgt

$$(8.49) \quad F_j^{(n)}(s,t) = 1 - (1-s)m_j \lambda_j e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^p a_r \sum_{\ell=0}^r b_{r,\ell} t^\ell + \\ + \exp(-\lambda t) G_2(s,t).$$

Vertauscht man noch die Summationsreihenfolge in dieser Doppelsumme, folgt die Behauptung des Lemmas 8.5. □

Folgerung 1 zu Lemma 8.5 : Für $p \gg 1$ ist für $s \in [0,1]$, $t \geq 0$

$$(8.50) \quad F_j^{(n)}(s,t) = 1 - (1-s) \bar{a}_p e^{-\lambda t} t^p + \beta(s,t), \text{ mit}$$

$$(8.51) \quad \bar{a}_p = a_p m_j \lambda_j / (\lambda_j - \lambda),$$

$$(8.52) \quad |\beta(s,t)| \leq A \exp(-\lambda t) t^{p-1} + B \exp(-\lambda t),$$

$A, B \gg 0$, reell und nur noch von s, j und n abhängig.

Folgerung 2 zu Lemma 8.5 : Ist $|G_1(s,t)| \leq \exp(-bt) B(s,t)$

mit einer reellen Zahl $b > 0$ und

einer bezüglich t auf $[0, \infty)$ beschränkten Funktion B , $s \in [0,1]$,

dann gilt auch $|G_2(s,t)| \leq \exp(-\bar{b}t) \bar{B}(s,t)$ mit $\bar{b} > 0$, reell

und $\bar{B}$ ist bezüglich t auf $[0, \infty)$ beschränkt, $s \in [0,1]$.

Beweise : Folgerung 1 ist klar.

Zu Folgerung 2 ist lediglich zu untersuchen, wie sich

(8.43), (8.44) und die Reste $G_r(t)$ $r = 0, 1, \dots, p$ von (8.45)

unter der stärkeren Voraussetzung verhalten.

Sei $\bar{b} := \min(b, \lambda/2, \lambda_j - \lambda) > 0$.

Dann ist $\sum_{r=0}^p \sigma_r(t)$ nicht größer als $e^{-\lambda t} A_4 e^{-\bar{b}t}$.

$$\begin{aligned} |J(s,t)| &\leq A_5 e^{-\lambda t} e^{-bt} \int_0^t e^{(\lambda + b - \lambda_j)u} du \\ &= A_6 e^{-\lambda t} (e^{-(\lambda_j - \lambda)t} - e^{-bt}) \\ &\leq A_7 \exp(-\lambda t) \exp(-\bar{b}t). \end{aligned}$$

Für $|K(s,t)|$ aus (8.44) erhält man aus (8.46) - (8.48) dann auf ähnliche Weise die gewünschte Abschätzung. □

Lemma 8.6 : Es sei (8.1) vorausgesetzt, $n \in \mathbb{N}$, $p, j \in \mathbb{N}_0$, $\lambda = \lambda_j > 0$.

Wenn für $s \in [0,1]$, $t \geq 0$

$$(8.53) \quad F_{j+1}^{(n-1)}(s,t) = 1 - (1-s) a e^{-\lambda t} t^p + \beta(s,t)$$

mit einer nicht negativen Zahl a und

$$(8.54) \quad |\beta(s,t)| \leq \begin{cases} A_1 \exp(-\lambda t) t^{p-1} + B_1 \exp(-\lambda t) & \text{für } p \geq 1 \\ A_2 \exp(-\lambda t - bt) & \text{für } p = 0 \end{cases}$$

mit Zahlen A_1, A_2, B_1 , die nicht mehr von t abhängen und $b > 0$,

dann gilt für $s \in [0,1]$, $t \geq 0$

$$(8.55) \quad F_j^{(n)}(s,t) = 1 - (1-s) \frac{m_j \lambda}{p+1} a e^{-\lambda t} t^{p+1} + \bar{\beta}(s,t), \text{ mit}$$

$$(8.56) \quad |\bar{\beta}(s,t)| \leq A_3 \exp(-\lambda t) t^p + B_2 \exp(-\lambda t)$$

mit Zahlen A_3, B_2 , die nur noch von s, j, n abhängen.

Beweis :

1.] Wie in (8.41) folgt aus (8.53) und (8.54) für $s \in [0,1]$, $0 \leq u \leq t$

$$\begin{aligned} h_j(F_{j+1}^{(n-1)}(s, t-u)) &= 1 - m_j(1-s) a e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^p + m_j \beta(s, t-u) \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ (1-s) a e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^p - \beta(s, t-u) \right\}^2 R_j(F_{j+1}^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Dies ergibt mit Lemma 8.1 wegen $\lambda = \lambda_j$

$$\begin{aligned} (8.57) \quad F_j^{(n)}(s, t) &= 1 - (1-s) m_j \lambda a \int_0^t (t-u)^p e^{-\lambda(t-u)} e^{-\lambda u} du \\ &+ J(s, t) + K(s, t) \\ &= 1 - (1-s) \frac{m_j \lambda}{p+1} a e^{-\lambda t} t^{p+1} + J + K. \end{aligned}$$

Dabei definiert man wieder

$$J(s, t) := m_j \lambda \int_0^t \beta(s, t-u) e^{-\lambda u} du,$$

$$K(s, t) := \frac{1}{2} \lambda \int_0^t \left\{ (1-s) a e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^p - \beta(s, t-u) \right\}^2 R_j e^{-\lambda u} du.$$

2.] Auf Grund von (8.54) ist

$$|J(s, t)| \leq \begin{cases} A_4 \exp(-\lambda t) t^p + A_5 \exp(-\lambda t) t & \text{für } p \gg 1 \\ A_6 \exp(-\lambda t) \int_0^t \exp(-b(t-u)) du \leq A_7 \exp(-\lambda t) & \text{für } p = 0. \end{cases}$$

Schätzt man für $p \gg 1$ $\exp(-\lambda t) \cdot t$ für $0 \leq t \leq 1$ durch $\exp(-\lambda t)$ und

für $t \gg 1$ durch $\exp(-\lambda t) \cdot t^p$ ab, so erhält man insgesamt für $s \in [0,1]$

$$|J(s, t)| \leq A_8 \exp(-\lambda t) t^p + A_9 \exp(-\lambda t) \quad \text{für } t \gg 0, p \gg 0.$$

3.] Weiter folgt aus (8.54) für $p \gg 1$

$$\begin{aligned}
 |K(s,t)| &\leq B_3 \int_0^t \left\{ e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^p + A_1 e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^{p-1} \right. \\
 &\quad \left. + B_1 e^{-\lambda(t-u)} \right\}^2 e^{-\lambda u} du \\
 &= B_3 e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \left\{ (t-u)^p + A_1 (t-u)^{p-1} + B_1 \right\}^2 du \\
 &= B_3 e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda y} p(y) dy,
 \end{aligned}$$

mit einem Polynom $p(y)$ von maximalem Grad $2p$. Mit Lemma 8.3 folgt

$$\int_0^t e^{-\lambda y} p(y) dy = e^{-\lambda t} p_1(t) + B_4$$

mit einem Polynom $p_1(t)$ von maximalem Grad $2p$, dessen Koeffizienten nur von j, n, s abhängen. Damit wird

$$\begin{aligned}
 |K(s,t)| &\leq B_3 \exp(-2\lambda t) p_1(t) + B_5 \exp(-\lambda t) \\
 &\leq B_6 \exp(-\lambda t) t^p + B_7 \exp(-\lambda t),
 \end{aligned}$$

wenn man beachtet, daß ein $t_0 > 0$ existiert, so daß

$\exp(-\lambda t) p_1(t) \leq t^p$ für $t \geq t_0$ und $\exp(-\lambda t) p_1(t) \leq B_8 \exp(-\lambda t)$ für $0 \leq t < t_0$.

Für $p = 0$ erhält man wegen (8.54)

$$\begin{aligned}
 |K(s,t)| &\leq B_9 \exp(-\lambda t) \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} (1 + A_2 e^{-b(t-u)})^2 du \\
 &\leq B_{10} \exp(-\lambda t).
 \end{aligned}$$

4.] Fassen wir die Ergebnisse von 2. und 3. in (8.57) zusammen, folgt die Behauptung. □

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum eigentlichen

Beweis von Satz 8.1 :

1.] Für $k = 0$ ist der Beweis einfach:

Es ist $T_{i,0} = 0$ und $D_{i,0} = 1$. Setzt man $\mathcal{G}_{i,0}(s,t) \equiv 0$,

so hat $F_i^{<0>}(s,t)$ aus (8.30) die Form (8.2) der Behauptung.

2.] Sei nun allgemein $k \geq 1$ und

(+) $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \lambda_{i+k}$ der zu $F_i^{<k>}$ gehörende Abschnitt

der Parameterfolge, den man nach Bemerkung 8.1 auch in der Form (++)

darstellen kann. Für $s \in [0,1]$, $t \geq 0$ ist nach (8.30)

$$F_{i+k}^{<0>}(s,t) = 1 - (1-s) \exp(-\lambda_{i+k} t) .$$

Im Fall $\lambda_{i+k-1} > \lambda_{i+k}$ folgt dann aus Lemma 8.5 und der Folgerung 2

$$(8.58) \quad F_{i+k-1}^{<1>}(s,t) = 1 - (1-s) e^{-\lambda_{i+k} t} m_{i+k-1} \lambda_{i+k-1} / (\lambda_{i+k-1} - \lambda_{i+k}) \\ + \mathcal{G}_{i+k-1,1}(s,t) \exp(-\lambda_{i+k} t)$$

$$\text{mit } |\mathcal{G}_{i+k-1,1}(s,t)| \leq \exp(-b_{i+k-1} t) \bar{\mathcal{G}}_{i+k-1}(s,t)$$

$b_{i+k-1} > 0$ und $\bar{\mathcal{G}}_{i+k-1}(s,t)$ ist bez. t auf $[0, \infty)$ beschränkt.

Im Fall $\lambda_{i+k-1} = \lambda_{i+k}$ folgt aus Lemma 8.6

$$(8.59) \quad F_{i+k-1}^{<1>}(s,t) = 1 - (1-s) m_{i+k-1} \lambda_{i+k-1} e^{-\lambda_{i+k} t} t \\ + \mathcal{G}'_{i+k-1,1}(s,t)$$

mit $\mathcal{S}'_{i+k-1,1}(s,t) \leq A_{i+k-1,1} \exp(-\lambda_{i+k-1}t)$.

3.] Dies war der erste Schritt von $F_{i+k}^{<0>} \xrightarrow{<1>} F_{i+k-1}^{<1>}$. Allgemein folgt für den 1-ten Schritt beim Übergang $F_{i+k-1+1}^{<1-1>} \xrightarrow{<1>} F_{i+k-1}^{<1>}$ für $l = 1, \dots, k$ mit der Abkürzung $j := i+k-1$:

Ist $\lambda_j > \lambda_{i+k}$, $p \gg 1$ und

$$(8.60) \quad F_{j+1}^{<1-1>}(s,t) = 1 - (1-s) a t^p e^{-\lambda_{i+k}t} + \mathcal{S}_{j+1,1-1}(s,t)$$

$$(8.61) \quad |\mathcal{S}_{j+1,1-1}(s,t)| \leq A_{j+1,1-1} e^{-\lambda_{i+k}t} t^{p-1} + B_{j+1,1-1} e^{-\lambda_{i+k}t}$$

dann folgt aus Lemma 8.5 und Folgerung 1 zu Lemma 8.5

$$(8.62) \quad F_j^{<1>}(s,t) = 1 - (1-s) a m_j \lambda_j (\lambda_j - \lambda_{i+k})^{-1} e^{-\lambda_{i+k}t} t^p + \mathcal{S}_{j,1}(s,t)$$

$$(8.63) \quad |\mathcal{S}_{j,1}(s,t)| \leq A_{j,1} \exp(-\lambda_{i+k}t) t^{p-1} + B_{j,1} \exp(-\lambda_{i+k}t).$$

Ist $\lambda_j > \lambda_{i+k}$, $p = 0$ und gilt (8.60) für $p = 0$ mit

$$(8.64) \quad |\mathcal{S}_{j+1,1-1}(s,t)| \leq e^{-\lambda_{i+k}t - b_{j+1}t} B_{j+1,1-1}(s,t)$$

und mit $B_{j+1,1-1}(s,t)$ beschränkt bez. t auf $[0, \infty)$,

dann liefert Lemma 8.5 mit Folgerung 2 (8.62) für $p = 0$ mit

$$|\mathcal{S}_{j,1}(s,t)| \leq \exp(-\lambda_{i+k}t - b_j t) B_{j,1}(s,t),$$

$$b_j := \min(b_{j+1}, \lambda_j - \lambda_{i+k}, \lambda_{i+k} / 2) > 0 \quad \text{und}$$

$B_{j,1}(s,t)$ ist beschränkt bez. t auf $[0, \infty)$.

Ist $\lambda_j = \lambda_{i+k}$, $p \geq 0$ und gilt (8.60) mit (8.61) für $p \geq 1$

oder (8.64) für $p = 0$, dann folgt aus Lemma 8.6

$$(8.65) \quad F_j^{(1)}(s,t) = 1 - (1-s) a_{m_j} \lambda_j^{(p+1)-1} e^{-\lambda_{i+k} t} t^{p+1} + \mathcal{P}_{j,1}(s,t)$$

$$(8.66) \quad |\mathcal{P}_{j,1}(s,t)| \leq A_{j,1} \exp(-\lambda_{i+k} t) t^p + B_{j,1} \exp(-\lambda_{i+k} t).$$

Das heißt im Fall $\lambda_j > \lambda_{i+k}$ wird beim Übergang $F_{j+1}^{(1-1)} \rightarrow F_j^{(1)}$ die höchste t -Potenz beibehalten, mit dem Faktor $m_j \lambda_j (\lambda_j - \lambda_{i+k})^{-1}$ multipliziert und das Restglied kann von gleichbleibender Größenordnung abgeschätzt werden.

Im Fall $\lambda_j = \lambda_{i+k}$ erhöht sich dagegen die t -Potenz um 1, sie wird mit dem Faktor $m_j \lambda_j^{(neuer Exponent von t)-1}$ multipliziert und die Abschätzung des Restglieds ist ebenfalls eine t -Potenz höher; mit der offensichtlichen Modifikation beim Übergang $t^0 \rightarrow t$.

4. Um $F_j^{(k)}$ aus $F_{i+k}^{(0)}$ abzuleiten, muß man also bei den Übergängen

$$F_{j+1}^{(1-1)} \rightarrow F_j^{(1)}, \quad 1 = 1, \dots, k, \quad \text{beachten, ob in dem monoton}$$

fallenden Abschnitt (+) λ_j schon größer als λ_{i+k} oder noch gleich λ_{i+k} ist. $T_{i,k}$ ist dann die Anzahl der Übergänge, bei welchen

λ_j noch gleich λ_{i+k} ist. $D_{i,k}$ erhält man als Produkt der Faktoren, die den jeweiligen Übergängen entsprechen.



Bemerkung 8.4 : Es gelte (8.1) und $0 < \lambda_j < \lambda$, $j \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann zeigt man ähnlich wie in Lemma 8.5 für $s \in [0,1]$

und $t \geq 0$: Wenn

$$F_{j+1}^{<n-1>}(s,t) = 1 - \exp(-\lambda t) \left\{ p_1(1-s,t) + G_1(s,t) \right\}$$

mit einem Polynom p_1 vom Grad $\leq a$ in t und vom Grad b in $1-s$

$a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$, dann ist

$$F_j^{<n>}(s,t) = 1 - \exp(-\lambda_j t) \left\{ p_2(1-s,t) + G_2(s,t) \right\}$$

mit einem Polynom p_2 vom Grad $\leq a$ in t und im allgemeinen vom Grad größer als b in $1-s$.

Der Beweis von Satz 8.2 :

Die beiden folgenden Lemmata 8.7 und 8.8 für die gemeinsamen WEF entsprechen den Lemmata 8.5 und 8.6 für die eindimensionale WEF der Populationsgenerationsgröße und bilden das Kernstück des Beweises von Satz 8.2 .

Lemma 8.7 : Es sei (8.1) vorausgesetzt und $n \in \mathbb{N}$, $j, p \in \mathbb{N}_0$, $0 < \lambda < \lambda_j$.

Wenn für $s, \sigma \in [0,1]$, $t, \tau \geq 0$

$$(8.67) \quad F_{j+1}^{(n-1)}(s, \sigma; t, \tau) = 1 - e^{-\lambda t} \left\{ \left[s(1-\sigma)e^{-\lambda \tau} + 1-s \right] \sum_{r=0}^p a_r t^r + G_1(s, \sigma; t, \tau) \right\}$$

mit nicht negativen Zahlen a_r , $r = 0, 1, \dots, p$, und

$G_1(s, \sigma; t, \tau)$ wie in der Vereinbarung gilt,

dann gilt für $s, \sigma \in [0,1]$, $t, \tau \geq 0$

$$(8.68) \quad F_j^{(n)}(s, \sigma; t, \tau) = 1 - e^{-\lambda t} \left\{ \left[s(1-\sigma)e^{-\lambda \tau} + 1-s \right] \sum_{r=0}^p \bar{a}_r t^r + G_2(s, \sigma; t, \tau) \right\}$$

mit $\bar{a}_r$ aus (8.39) und $G_2(s, \sigma; t, \tau)$ wie in der Vereinbarung.

Beweis : $F_{j+1}^{(n-1)}(s, \sigma; t, \tau)$, $F_{j+1}^{(n-1)}(s, t) \in [0,1]$. Aus Lemma 8.2 Satz 8.1 und (8.67) folgt

$$\begin{aligned}
 (8.69) \quad h_j(F_{j+1}^{<n-1>}(\zeta, t+\tau-u)) &= \\
 &= 1 - m_j(1-\zeta) D_{j+1, n-1}(t+\tau-u) T_{j+1, n-1} e^{-\lambda_{j+n}(t+\tau-u)} \\
 &\quad (1 + \vartheta_{j+1, n-1}(\zeta, t+\tau-u)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 - F_{j+1}^{<n-1>}(\zeta, t+\tau-u))^2 R_{j+1}(F_{j+1}^{<n-1>}(\zeta, t+\tau-u))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8.70) \quad h_j(F_{j+1}^{<n-1>}(s, \zeta; t-u, \tau)) &= \\
 &= 1 - m_j e^{-\lambda(t-u)} \left\{ \left[s(1-\zeta)e^{-\lambda\tau} + 1-s \right] \sum_{r=0}^p a_r(t-u)^r \right. \\
 &\quad \left. + \zeta_1(s, \zeta; t-u, \tau) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1 - F_{j+1}^{<n-1>}(s, \zeta; t-u, \tau))^2 R_{j+1}(F_{j+1}^{<n-1>}(s, \zeta; t-u, \tau))
 \end{aligned}$$

und beide Reste liegen in $[0, \delta_j]$. Setzt man (8.69) und (8.70)

in (8.33) ein:

$$\begin{aligned}
 (8.71) \quad F_j^{<n>}(s, \zeta; t, \tau) &= \\
 &= e^{-\lambda_j(t+\tau)} + \int_t^{t+\tau} \lambda_j e^{-\lambda_j u} du + \int_0^t \lambda_j e^{-\lambda_j u} du \\
 &\quad - m_j \lambda_j \left[s(1-\zeta)e^{-\lambda\tau} + 1-s \right] \sum_{r=0}^p a_r \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^r e^{-\lambda_j u} du \\
 (J_1) \quad &- m_j \lambda_j (1-\zeta) D_{j+1, n-1} \int_0^\tau y^{T_{j+1, n-1}} e^{-\lambda_{j+n} y} e^{-\lambda_j(t+\tau-y)} \\
 &\quad \cdot (1 + \vartheta_{j+1, n-1}(\zeta, y)) dy
 \end{aligned}$$

$$(J_2) \quad + \frac{1}{2} \lambda_j \int_0^{\tau} (1 - F_{j+1}^{(n-1)}(\sigma, y))^2 R_{j+1}^{(n-1)}(F_{j+1}^{(n-1)}(\sigma, y)) e^{-\lambda_j(t+\tau-y)} dy$$

$$(J_3) \quad - m_j \lambda_j \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} G_1(s, \sigma; t-u, \tau) e^{-\lambda_j u} du$$

$$(J_4) \quad + \frac{1}{2} \lambda_j \int_0^t (1 - F_{j+1}^{(n-1)}(s, \sigma; t-u, \tau))^2 R_{j+1}^{(n-1)}(F_{j+1}^{(n-1)}(s, \sigma; t-u, \tau)) \cdot e^{-\lambda_j(t-u)} du.$$

Wegen $\lambda_j > \lambda$ und (8.45) folgt

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^r e^{-\lambda_j u} du = e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} b_{r,j} t^r + G_r(t)$$

mit $b_{r,j}$ aus (8.40). Folglich wird

$$F_j^{(n)}(s, \sigma; t, \tau) = 1 - e^{-\lambda t} [s(1-\sigma)e^{-\lambda \tau} + 1-s] \sum_{r=0}^p \bar{a}_r t^r + \tilde{\beta}(s, \sigma, t, \tau)$$

mit $\bar{a}_r$ aus (8.39) und in $\tilde{\beta}(s, \sigma, t, \tau)$ seien die letzten vier Terme, die wir mit $J_\nu = J_\nu(s, \sigma, t, \tau)$, $\nu = 1, \dots, 4$ bezeichnen wollen,

$$\text{und } J_5(s, \sigma, t, \tau) := -m_j \lambda_j [s(1-\sigma)e^{-\lambda \tau} + 1-s] \sum_{r=0}^p a_r e^{-\lambda t} G_r(t)$$

zusammengefaßt.

Es ist noch zu zeigen, daß $\beta(s, \sigma, t, \tau) = \exp(-\lambda t) G_2(s, \sigma; t, \tau)$ ist:

Es ist für $t \geq 0$

$$|J_\nu| \leq A_{\nu+2} \exp(-\lambda t) \exp(-(\lambda_j - \lambda)t) \quad \text{für } \nu = 1, 2.$$

J_3 und J_4 behandelt man wie J und K in (8.43) und (8.44)

im Beweis von Lemma 8.5 und erhält dann

$$|J_\nu| \leq A_{\nu+2} \exp(-\lambda t) \cdot \overline{G}_\nu(t) \quad \text{für } \nu = 3, 4.$$

Dasselbe erhält man für J_5 .



Folgerung 1 zu Lemma 8.7 : Für $p \gg 1$ ist

$$(8.72) \quad F_j^{(n)}(s, \zeta; t, \tau) = 1 - e^{-\lambda t} [s(1-\zeta)e^{-\lambda \tau} + 1-s] \bar{a}_p t^p \\ + \bar{\beta}(s, \zeta; t, \tau)$$

$$\text{mit } |\bar{\beta}(s, \zeta; t, \tau)| \leq A_1 e^{-\lambda t} t^p + B_1 e^{-\lambda t} \quad \text{für } t \geq 0.$$

Folgerung 2 zu Lemma 8.7 : Ist $|\overline{G}_1(s, \zeta; t, \tau)| \leq e^{-bt} B(s, \zeta; t, \tau)$

mit einer Zahl $b > 0$ und einer Funktion B , die für $t \geq 0$ beschränkt ist,

dann gilt $|\overline{G}_2(s, \zeta; t, \tau)| \leq e^{-\bar{b}t} \bar{B}(s, \zeta; t, \tau)$ mit einer Funktion

$\bar{B}$, die für $t \geq 0$ beschränkt ist und $\bar{b} := \min(b, \lambda_j - \lambda, \lambda/2) > 0$.

Beweise : Folgerung 1 ist klar. Folgerung 2 erhält man, indem man in

(8.71) wie bei der Folgerung 2 zu Lemma 8.5 die stärkere

Voraussetzung über $\overline{G}_1$ bei den Abschätzungen ausnutzt.



Lemma 8.8 : Es sei (8.1) vorausgesetzt und $n \in \mathbb{N}$, $j, p \in \mathbb{N}_0$, $\lambda = \lambda_j > 0$.

Wenn für $s, \sigma \in [0, 1]$, $t, \tau \gg 0$

$$(8.73) \quad F_{j+1}^{\langle n-1 \rangle}(s, \sigma; t, \tau) = 1 - [s(1-\sigma)e^{-\lambda\tau} + 1-s] a e^{-\lambda t} t^p + \beta(s, \sigma; t, \tau)$$

mit einer nicht negativen Zahl a und mit

$$(8.74) \quad |\beta(s, \sigma; t, \tau)| \leq \begin{cases} A_1 \exp(-\lambda t) t^{p-1} + B_1 \exp(-\lambda t), & p \geq 1 \\ A_2 \exp(-\lambda t - bt), & p = 0, \end{cases}$$

dann gilt für $s, \sigma \in [0, 1]$, $t, \tau \gg 0$

$$(8.75) \quad F_j^{\langle n \rangle}(s, \sigma; t, \tau) = 1 - [s(1-\sigma)e^{-\lambda\tau} + 1-s] \frac{m_j \lambda}{p+1} a e^{-\lambda t} t^{p+1} + \bar{\beta}(s, \sigma; t, \tau)$$

$$(8.76) \quad |\bar{\beta}(s, \sigma; t, \tau)| \leq A_3 \exp(-\lambda t) t^p + B_3 \exp(-\lambda t).$$

Beweis : Es gilt (8.69) und analog (8.70) gilt jetzt

$$(8.77) \quad \begin{aligned} h_j(F_{j+1}^{\langle n-1 \rangle}(s, \sigma; t-u, \tau)) &= \\ &= 1 - m_j [s(1-\sigma)e^{-\lambda\tau} + 1-s] a e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^p \\ &\quad + m_j \beta(s, \sigma; t-u, \tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 - F_{j+1}^{\langle n-1 \rangle}(s, \sigma; t-u, \tau))^2 R_{j+1}(F_{j+1}^{\langle n-1 \rangle}(s, \sigma; t-u, \tau)) \end{aligned}$$

und R_{j+1} liegt in $[0, \delta_j]$. Dies in (8.33) eingesetzt :

$$\begin{aligned}
 (8.78) \quad & F_j^{(n)}(s, \zeta; t, \tau) = \\
 & = e^{-\lambda_j(t+\tau)} + \int_t^{t+\tau} \lambda_j e^{-\lambda_j u} du + \int_0^t \lambda_j e^{-\lambda_j u} du \\
 & - m_j \lambda_j [s(1-\zeta)e^{-\lambda\tau} + 1-s] a \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^p e^{-\lambda_j u} du \\
 (J_1) \quad & - m_j \lambda_j (1-\zeta) D_{j+1, n-1} \int_0^\tau \int_y^{t+\tau-y} e^{-\lambda_{j+n} y} \cdot \\
 & \cdot e^{-\lambda_j(t+\tau-y)} (1 + \varphi_{j+1, n-1}(\zeta, y)) dy \\
 (J_2) \quad & + \frac{1}{2} \lambda_j \int_0^\tau (1 - F_{j+1}^{(n-1)}(\zeta, y))^2 R_{j+1}(F_{j+1}^{(n-1)}(\zeta, y)) \cdot \\
 & \cdot e^{-\lambda_j(t+\tau-y)} dy \\
 (J_3) \quad & + m_j \lambda_j \int_0^t \beta(s, \zeta; t-u, \tau) e^{-\lambda_j u} du \\
 (J_4) \quad & + \frac{1}{2} \lambda_j \int_0^t (1 - F_{j+1}^{(n-1)}(s, \zeta; y, \tau))^2 \cdot \\
 & \cdot R_{j+1}(F_{j+1}^{(n-1)}(s, \zeta; y, \tau)) e^{-\lambda_j(t-y)} dy \\
 & = 1 - [s(1-\zeta)e^{-\lambda\tau} + 1-s] \frac{m_j \lambda_j}{p+1} a e^{-\lambda t} t^{p+1} \\
 & + \bar{\beta}(s, \zeta; t, \tau) \quad \text{mit } \lambda = \lambda_j,
 \end{aligned}$$

wenn wir die letzten vier Zeilen von (8.78) mit $J_\nu = J_\nu(s, \zeta, t, \tau)$
 $\nu = 1, \dots, 4$ bezeichnen und ihre Summe mit $\bar{\beta}(s, \zeta; t, \tau)$ abkürzen.
 Es ist noch zu zeigen, daß alle J_ν die Ungleichung (8.76) der Behauptung erfüllen.

Es ist für $p \gg 1$

$$|J_1| = A_4 \exp(-\lambda t) \quad \text{und} \quad |J_2| = A_5 \exp(-\lambda t) ;$$

$$|J_3| \leq A_6 \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^{p-1} e^{-\lambda u} du + A_7 \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} e^{-\lambda u} du$$

$$= A_6 p^{-1} \exp(-\lambda t) t^p + A_7 \exp(-\lambda t) t$$

$$\leq A_8 \exp(-\lambda t) t^p + A_9 \exp(-\lambda t)$$

wie in 2. des Beweises von Lemma 8.6 .

$$|J_4| \leq A_{10} e^{-\lambda t} \int_0^t \left\{ A_{11} e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^p + A_1 e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^{p-1} + B_1 e^{-\lambda(t-u)} \right\}^2 e^{-\lambda u} du$$

$$\leq A_{12} \exp(-\lambda t) t^p + A_{13} \exp(-\lambda t)$$

wie in 3. des Beweises von Lemma 8.6 .

Folglich erfüllt auch $\bar{\beta}(s, \sigma; t, \tau)$ die geforderte Ungleichung (8.76) .

Für $p=0$ bleibt die Abschätzung für $|J_v|$, $v = 1, 2$ gültig.

$$|J_3| \leq A_{14} e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-b(t-u)} du \leq A_{15} \exp(-\lambda t)$$

wie in 2. des Beweises von Lemma 8.6.

Ebenso erhält man aus 3. des Beweises von Lemma 8.6 die gewünschte

Schranke für $|J_4|$.



Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum eigentlichen

Beweis von Satz 8.2 :

1.] Für $k = 0$ ist der Beweis einfach: Es ist wie bei Satz 8.1

$T_{i,0} = 0$ und $D_{i,0} = 1$. Mit $\bar{G}_{i,0} \equiv 0$ hat dann (8.32) die geforderte Gestalt von $F_i^{<0>}(s, \sigma; t, \tau)$ in Satz 8.2.

2.] Ist $k \gg 1$, muß man wie beim Beweis von Satz 8.1 $F_i^{<k>}(s, \sigma; t, \tau)$

sukzessiv aus $F_{i+k}^{<0>}(s, \sigma; t, \tau)$ ableiten und hat bei den

Obergängen $F_{i+k-1}^{<1-1>} \xrightarrow{\quad <1> \quad} F_{i+k-1}^{<1>} \quad 1 = 1, \dots, k$

zu beachten, ob der Parameter λ beim entsprechenden Übergang

$\lambda_{i+k-1+1} \rightarrow \lambda_{i+k-1}$ in dem Abschnitt (+) $\lambda_i \gg \dots \gg \lambda_{i+k}$

noch gleich λ_{i+k} oder schon größer als λ_{i+k} ist.

Für $s, \sigma \in [0, 1]$, $t, \tau \geq 0$ ist nach (8.32)

$$F_{i+k}^{<0>}(s, \sigma; t, \tau) = 1 - e^{-\lambda_{i+k} t} \left[s(1-\sigma)e^{-\lambda_{i+k} \tau} + 1-s \right]$$

Im Fall $\lambda_{i+k-1} > \lambda_{i+k}$ liefert Folgerung 2 zu Lemma 8.7

wenn man $j := i+k$ setzt:

$$\begin{aligned} F_{j-1}^{<1>}(s, \sigma; t, \tau) &= 1 - e^{-\lambda_j t} \frac{m_{j-1} \lambda_{j-1}}{\lambda_{j-1} - \lambda_j} \left[s(1-\sigma)e^{-\lambda_j \tau} + 1-s \right] \\ &\quad + \bar{G}_{j-1,1}(s, \sigma; t, \tau) e^{-\lambda_j t} \end{aligned}$$

und $|\bar{G}_{j-1,1}(s, \sigma; t, \tau)| \leq \exp(-d_{j-1} t) \bar{G}_{j-1,1}(s, \sigma; t, \tau)$

$d_{j-1} > 0$ und $\bar{G}_{j-1,1}$ bezüglich t auf $[0, \infty)$ beschränkt.

Im Fall $\lambda_{i+k-1} = \lambda_{i+k}$ liefert Lemma 8.8 mit $j := i+k$

$$F_{j-1}^{<1>}(s, \sigma; t, \tau) = 1 - e^{-\lambda_j t} t m_{j-1} \lambda_{j-1} [s(1-\sigma)e^{-\lambda_j \tau} + 1-s] \\ + \sigma'_{j-1,1}(s, \sigma; t, \tau)$$

$$\text{und } \sigma'_{j-1,1}(s, \sigma; t, \tau) \leq A_{j-1,1} \exp(-\lambda_j t).$$

3. | Den allgemeinen Übergang für $l = 1, 2, \dots, k$

$$F_{i+k-l+1}^{<1-l>}(s, \sigma; t, \tau) \longrightarrow F_{i+k-l}^{<1>}(s, \sigma; t, \tau)$$

kann man analog dem entsprechenden Übergang

$$F_{i+k-l+1}^{<1-l>}(s, t) \longrightarrow F_{i+k-l}^{<1>}(s, t) \text{ führen ;}$$

denn es ergeben Lemma 8.7 mit Folgerungen und Lemma 8.8 bezüglich

$e^{-\lambda t}$, den t -Potenzen und den multiplikativen Faktoren das gleiche

Bild wie Lemma 8.5 mit Folgerungen und Lemma 8.6 .



§ 9 Konvergenz der Populationsgenerationsgröße in einer Folge von generationsabhängigen Bellman-Harris Prozessen mit exponentiellen Lebensdauern

Zur Fragestellung III in 7.1 erhält man, daß bei einer großen Anzahl N von Urvätern die Populationsgenerationen asymptotisch nach einem zusammengesetzten Poisson-Prozess entstehen, siehe Bühler [6]. In diesen Zusammenhang gehören auch die Ergebnisse von Stratton-Tucker [37], Bühler [4], und Savage-Shimi [32]. Man zeigt dazu im wesentlichen, daß die Generationsgröße asymptotisch für "große N und kleine Zeiten t " Poisson-verteilt ist und daß der Prozess asymptotisch unabhängige Zuwächse hat.

Zu der in gewissem Sinne dualen Frage IV in 7.1 wird in diesem Paragraphen die k -te Populationsgeneration bei einer großen Anzahl von Urvätern asymptotisch nach langer Zeit untersucht.

Wir werden dabei sehen, daß die Populationsgenerationsgröße asymptotisch für "große N und große t " Poisson-verteilt ist und daß die Abnahmen asymptotisch unabhängig sind. Letztlich stirbt eine Populationsgeneration also nach einem Poisson-Prozess aus.

Für diesen Paragraphen sei vorausgesetzt:

Für $N \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}_0$ ist

(9.1) $\{ {}_N Z_i(t), t \geq 0 \}$ ein generationsabhängiger Bellman-Harris Prozess, wie er in 6.2 definiert wurde, mit

$$N_i^{Z_i}(0) = N;$$

$$(9.1) \quad G_k(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda_k t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0; \end{cases}$$

Forts. $\{\lambda_k\}$ ist monoton fallend, $\lambda_k > 0$;

$$0 < m_k := h_k^I(1) \quad , \quad h_k^II(1) \leq \bar{m}_2 < \infty; \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist $\{\{N_i^{Z_i}(t), t \geq 0\} : N = 1, 2, \dots\}$ eine Folge von generationsabhängigen Bellman-Harris Prozessen.

$\langle k \rangle$
 $N_i^{Z_i}(t)$ sei die Anzahl der Individuen aus der k-ten Populationsgeneration, die zur Zeit t leben, wenn die Population mit N Urvätern aus der i-ten Generation begonnen hat. Wir setzen:

$$N_i^{F_i}(s, t) = E \left[s^{N_i^{Z_i}(t)} \right],$$

$$N_i^{F_i}(s, \tau; t, \tau) = E \left[s^{N_i^{Z_i}(t)} G^{N_i^{Z_i}(t+\tau)} \right],$$

Satz 9.1 : Sei $i \in \mathbb{N}_0$ und $\{N_i^{Z_i}(t), t \geq 0\}$ eine Folge von generationsabhängigen Bellman-Harris Prozessen, die (9.1) erfüllen.

Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

Ist $\{t_N(i, k) : N = 1, 2, \dots\}$ eine reelle Zahlenfolge mit

$$(9.2) \quad N t_N(i, k) T_{i, k} e^{-\lambda_{i+k} t_N(i, k)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \nu(i, k) > 0,$$

dann folgt mit $\mu(i,k) := \exp(-\lambda_{i+k}\tau) \cdot \nu(i,k)$

$$(9.3) \quad \langle k \rangle \quad {}_N F_i(s, t_N(i,k)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp(-D_{i,k}(1-s) \nu(i,k))$$

$$(9.4) \quad \langle k \rangle \quad {}_N F_i(s, \sigma; t_N(i,k), \tau) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp\left(-D_{i,k}\left[(1-s\sigma)\mu(i,k) + (\nu(i,k) - \mu(i,k))(1-s)\right]\right)$$

für $s, \sigma \in [0,1], \tau \geq 0$.

Beweis : $\{Z_i(t), t \geq 0\}$ ist wegen der Verzweigungseigenschaft, vgl.

Athreya-Ney [2], S. 3, die Summe von N unabhängigen Versionen

des generationsabhängigen Bellman-Harris Prozesses $\{Z_i(t), t \geq 0\}$,

der (9.1) erfüllt. Somit ist $\langle k \rangle \quad {}_N Z_i(t)$ die Summe von N unabhängigen

ZV, die alle die gleiche Verteilung wie $\langle k \rangle \quad Z_i(t)$ haben, und folglich

$$(9.5) \quad \langle k \rangle \quad {}_N F_i(s, t) = \left[F_i(s, t) \right]^N$$

$$(9.6) \quad \langle k \rangle \quad {}_N F_i(s, \sigma; t, \tau) = \left[F_i(s, \sigma; t, \tau) \right]^N.$$

Aus Satz 8.1 folgt

$$(9.7) \quad \langle k \rangle \quad {}_N F_i(s, t_N(i,k)) = \left\{ 1 - \frac{1-s}{N} x_N(i,k) \right\}^N$$

$$\text{mit} \quad x_N(i,k) := D_{i,k} \cdot {}_N t_N(i,k)^{T_{i,k}} \cdot e^{-\lambda_{i+k} t_N(i,k)} \cdot (1 + g_{i,k}(s, t_N(i,k)))$$

$$(9.8) \quad \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \nu(i,k) D_{i,k};$$

diese Konvergenz in (9.8) folgt aus (9.2) und da wiederum wegen (9.2) $t_N(i,k) \rightarrow \infty$ und folglich $\mathcal{G}_{i,k}(s, t_N(i,k)) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ gehen. (9.3) folgt dann aus (9.7) und (9.8), da bekanntlich $(1 - x(N)/N)^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \exp(-x)$, wenn $x(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} x$.

(9.4) beweist man genauso, indem man die Darstellung aus Satz 8.2 benutzt und beachtet, daß

$$\begin{aligned} [s(1-s) e^{-\lambda_{i+k}\tau} + 1-s] \mathcal{V}(i,k) &= (s-s\mathcal{G}) \mathcal{L}(i,k) + (1-s) \mathcal{V}(i,k) \\ &= (1-s\mathcal{G}) \mathcal{L}(i,k) + (\mathcal{V}(i,k) - \mathcal{L}(i,k)) (1-s). \end{aligned}$$

□

Folgerung 9.1 : Gehen unter den Annahmen (9.1) t und N so gegen ∞ , daß

$$(9.9) \quad N t^{\tau_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k}t} \xrightarrow[t, N \rightarrow \infty]{} \mathcal{V}(i,k), \text{ dann gilt für } i, k \in \mathbb{N}_0$$

(a) $\langle k \rangle_{N Z_i(t)}$ ist asymptotisch Poisson-verteilt mit Parameter $D_{i,k} \mathcal{V}(i,k)$;

(b) die Abnahmen $\langle k \rangle_{N Z_i(t)} - \langle k \rangle_{N Z_i(t+\tau)}$, $\langle k \rangle_{N Z_i(t+\tau)}$ sind asymptotisch unabhängig.

Beweis: (a) ist klar nach (9.3). Für (b) zeigen wir die folgende Beziehung für die charakteristischen Funktionen :
($\mathcal{L}$ sei die imaginäre Einheit.)

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} E \left[\exp \left\{ \epsilon x \left(N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t) - N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t+\tau) \right) \right\} \exp \left(\epsilon y N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t+\tau) \right) \right] \\
 = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} E \left[\exp \left\{ \epsilon x \left(N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t) - N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t+\tau) \right) \right\} \right] \\
 \cdot \lim_{N, t \rightarrow \infty} E \left[\exp \left(\epsilon y N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t+\tau) \right) \right] .
 \end{aligned}
 \tag{9.10}$$

Man kann die Sätze 8.1, 8.2, und 9.1 auch für $s, \tau \in \mathbb{C}$,

$|s|, |\tau| \leq 1$ beweisen; denn die WEF $F_i^{\langle k \rangle}(s, t)$ und $F_i^{\langle k \rangle}(s, \tau; t, \tau)$

wurden für komplexe Argumente definiert und die Entwicklung (8.36)

in Lemma 8.2 von $h_i(s)$ gilt auch für $s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1$, mit

$|R_i(s)| \leq \delta_i$, s. Sewastjanow [33], S. 6, Satz 1.

In den Beweisen der genannten Sätze werden dann die Reste komplexwertig, können aber betragsmäßig genauso wie reellwertige abgeschätzt werden.

Ersetzen wir s durch $e^{\epsilon x}$ und τ durch $e^{\epsilon y}$, wird die linke Seite von (9.10) gleich

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} E \left[\exp \left(\epsilon x N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t) \right) \exp \left(\epsilon (y-x) N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t+\tau) \right) \right] \\
 = \exp \left(-D_{i,k} \left\{ (1 - e^{\epsilon x} e^{\epsilon (y-x)}) \mu(i, k) + \right. \right. \\
 \left. \left. + (\nu(i, k) - \mu(i, k)) (1 - e^{\epsilon x}) \right\} \right)
 \end{aligned}$$

nach (9.4). Ebenfalls nach (9.4) wird

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} E \left[\exp \left(\epsilon x \left(N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t) - N_{Z_i}^{\langle k \rangle}(t+\tau) \right) \right) \right] \\
 = \exp \left(-D_{i,k} \left\{ (1 - e^{\epsilon x} \bar{e}^{\epsilon x}) \mu(i, k) + (\nu(i, k) - \mu(i, k)) \cdot \right. \right. \\
 \left. \left. \cdot (1 - e^{\epsilon x}) \right\} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \exp(-D_{i,k} (\nu(i,k) - \mu(i,k)) (1 - e^{-x}))$$

und nach (9.3) wird

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} E \left[\exp(\epsilon y_{N Z_i}^{(k)}(t + \tau)) \right] = \exp(-D_{i,k} \mu(i,k) (1 - e^{-y})) .$$

Da das Produkt der beiden letzten Grenzwerte gleich dem ersten Grenzwert ist, folgt (9.10). □

Bemerkung 9.1 : Folgerung 9.1 rechtfertigt und präzisiert das folgende heuristische Argument : Nach (8.7) ist zur Zeit t mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = D_{i,k} t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t} + o(t^{T_{i,k}} e^{-\lambda_{i+k} t})$$

noch ein Individuum der k -ten Populationsgeneration vorhanden. Beginnt man mit N Urvätern in Generation i , so verhalten sich die letzten Individuen der k -ten Populationsgeneration unabhängig voneinander. Gehen nun N und t so gegen ∞ , daß $N p \rightarrow g$, folgt aus dem Gesetz der kleinen Zahlen, daß die Anzahl der Individuen in der k -ten Populationsgeneration asymptotisch Poisson-verteilt mit Parameter g ist.

Für spezielle Bellman-Harris Prozesse, die (9.1) erfüllen, erhält man analog Korollar 8.2 und 8.3 eine Vereinfachung des Parameters $D_{i,k} \nu(i,k)$ der Poisson-Verteilung:

Folgerung 9.2 : Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $\left\{ ({}_N Z_i(t), t \geq 0) ; N = 1, 2, \dots \right\}$

eine Folge von generationsabhängigen Bellman-

Harris Prozessen, die (9.1) erfüllen.

Dann ist für $k \in \mathbb{N}_0$

$\langle k \rangle$
 $\underline{{}_N Z_i(t)}$ asymptotisch für $N, t \rightarrow \infty$ Poisson-verteilt

(a) mit Parameter $\left\{ \prod_{j=i}^{i+k-1} m_j \lambda_j / (\lambda_j - \lambda_{i+k}) \right\} \cdot \nu_{i+k}$,

wenn $\{\lambda_k\}$ streng monoton fallend ist und wenn

$$N \exp(-\lambda_{i+k} t) \xrightarrow{N, t \rightarrow \infty} \nu_{i+k} > 0 ;$$

(b) mit Parameter $(\prod_{j=i}^{i+k-1} m_j) \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \nu$,

wenn $\lambda_k = \lambda$ für alle k und $N t e^{k - \lambda t} \xrightarrow{N, t \rightarrow \infty} \nu > 0 ;$

(c) mit Parameter $\frac{m^k}{k!} \cdot \nu$, wenn $N t e^{k - t} \xrightarrow{N, t \rightarrow \infty} \nu > 0$

und wenn $\{ {}_N Z(t), t \geq 0 \}$ eine Folge von Markovschen Ver-

zweigungsprozessen in kontinuierlicher Zeit ist, vgl. 8.2,.

Anhang

Ober einen allgemeinen Erneuerungssatz von Smith

Für die Beschreibung des asymptotischen Verhaltens der ersten beiden Momente und damit auch für die L_2 -Konvergenz der Populationsgröße im generationsabhängigen Verzweigungsprozess ist ein Erneuerungssatz von Smith [35] für nicht notwendig identisch verteilte ZV von ausschlaggebender Bedeutung. Dieser Satz mit den dazu notwendigen Definitionen wird hier im Anhang aufgeführt.

Smith nennt eine Folge von unabhängigen, aber nicht notwendig identisch verteilten ZV $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ Erneuerungsfolge. Existiert eine positive reelle Zahl ω , so daß alle ZV der Folge $\{X_n\}$ nur ganzzahlige Vielfache von ω mit positiver W annehmen, heißt die Erneuerungsfolge periodisch, im anderen Fall heißt sie stetig.

Die periodische Erneuerungsfolge hat also ein allen ZV gemeinsames Gitter. Um bei den stetigen Erneuerungsfolgen zu einem Erneuerungssatz zu kommen, muß man solche Erneuerungsfolgen ausschließen, die beliebig lange ununterbrochene Teilfolgen von ZV enthalten, die Gittervariablen beliebig ähnlich sehen. Um dies zu präzisieren bedarf es einer etwas diffizilen Begriffsbildung.

Sei $\{A_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\{A_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ eine Teilfolge; setze

$$l_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } A_n \text{ in } \{A_{n_k}\} \text{ nicht vorkommt} \\ \max\{m : A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m-2} \text{ kommen in } \{A_{n_k}\} \text{ vor}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\{A_{n_k}\}$ heißt insistente Teilfolge von $\{A_n\} \iff \{l_n\}$ nicht beschränkt.

Darüber hinaus nennt man eine insistente Teilfolge $\{A_{n_k}\}$ schwach insistent, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß $l_n n^\delta - \frac{1}{3} \rightarrow 0$;
 $n \rightarrow \infty$

mild insistent , wenn $l_n / n \rightarrow 0$ und sie nicht schwach insistent ist;

stark insistent in den restlichen Fällen .

Eine Folge von ZV $\{Y_n\}_{n=1,2,\dots}$ heißt asymptotische Gitterfolge mit der asymptotischen Maschenweite h $\iff$ Es existieren Folgen

$\{a_n\}$ und $\{h_n\}$ mit $0 < h_n \rightarrow h \in (0, \infty]$ und die Folge $Y_n := Y_n - a_n \pmod{h_n}$ mit Werten in $[-h_n/2, h_n/2)$ konvergiert stochastisch gegen 0 für $n \rightarrow \infty$.

Sei im folgenden $\{X_n\}$ eine Erneuerungsfolge.

h heißt insistente Maschenweite von $\{X_n\}$ genau dann, wenn eine bezüglich der WV insistente Teilfolge $\{X_{n_k}\}$ von $\{X_n\}$ existiert, die asymptotische Gitterfolge mit der asymptotischen Maschenweite h ist.

Darüber hinaus nennt man eine insistente Maschenweite

h schwache (milde / starke) insistente Maschenweite von X_n ,
 wenn eine schwach insistente Teilfolge $\{X_{n_k}\}$ existiert, so daß h keine insistente Maschenweite von $\{X_n\} \setminus \{X_{n_k}\}$ ist (wenn h nicht schwach insistent ist und eine mild insistente Teilfolge $\{X_{n_k}\}$ existiert, so daß h keine insistente Maschenweite von $\{X_n\} \setminus \{X_{n_k}\}$ ist /
 wenn h nicht schwach und nicht mild insistent ist und eine stark insistente Teilfolge $\{X_{n_k}\}$ existiert, so daß h keine insistente

Maschenweite von $\{X_n\} \setminus \{X_{n_k}\}$ ist.

Mit $\mathcal{H}_w$, $\mathcal{H}_m$, $\mathcal{H}_s$ bezeichnen wir die Mengen der schwachen, milden, starken insistenten Maschenweiten von $\{X_n\}$.

Für einen Erneuerungssatz geeignete stetige Erneuerungsfolgen $\{X_n\}$ sind solche, für die

- (i) $\infty \notin \mathcal{H}_m$,
- (ii) $\mathcal{H}_m$ hat höchstens 0 als Häufungspunkt,
- (iii) $\mathcal{H}_s = \emptyset$

gilt; wir nennen sie kurz brave Erneuerungsfolgen.

Schließlich wird noch ein Stabilitätsbegriff benötigt:

Eine reelle Zahlenfolge $\{A_n\}$ nennt man stabile Folge mit Mittel A

$$\iff \frac{1}{p} (A_{n+1} + \dots + A_{n+p}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} A \quad \text{gleichmäßig für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Eine für die Erneuerungstheorie geeignete Übertragung dieses Begriffs auf Folgen von ZV ist:

$\{X_n\}$ heißt letztlich stochastisch stabil mit Mittel μ $\iff$

es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und $\mu < \infty$, so daß $E |\min(0, X_i)| < \infty$ für $i = 1, \dots, N-1$ und $\int_0^\infty \pi_{p,N}(x) dx \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$

$$\text{mit } \pi_{p,N} := \sup_{n \geq N} P \left(\left| \frac{X_{n+1} + \dots + X_{n+p}}{p} - \mu \right| \geq x \right).$$

Kann man $N = 1$ wählen, heißt $\{X_n\}$ stochastisch stabil mit Mittel μ .

Ein hinreichendes Kriterium: Sei $\{X_n\}$ eine Erneuerungsfolge. Sei

$G(x)$ eine nicht negative, monoton wachsende reellwertige Funktion zu der ein Δ existiert, so daß $\int_\Delta^\infty (G(x))^{-1} dx < \infty$ ist. Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ $E G(|X_n|) < c < \infty$ und $\{E X_n\}$ eine stabile Folge mit

Mittel μ ist, dann ist $\{X_n\}$ stochastisch stabil mit Mittel μ .

Sind z.B. die zweiten Momente der X_n beschränkt, kann man $G(x) = x^2$ wählen.

Mit diesen Vorbereitungen formulieren wir den allgemeinen Erneuerungssatz von Smith [35]:

Theorem 9 von Smith [35]

Sei $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine Erneuerungsfolge, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$,

$F_n(x)$ die VF von S_n , $\{a_n\}$ eine reelle Zahlenfolge und

$Q(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(x)$ die verallgemeinerte Erneuerungsfunktion.

Gelten die Voraussetzungen

- a) $\{X_n\}$ ist letztlich stochastisch stabil mit Mittel $\mu \in (0, \infty)$,
- b) $\{X_n\}$ ist eine brave Erneuerungsfolge,
- c) $\{a_n\}$ ist eine stabile Folge mit Mittel a ,
- d) k ist eine auf jedem endlichen Intervall Riemann-integrierbare Funktion mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{n \leq x \leq n+1} |k(x)| < \infty$

dann gilt die Behauptung

$$k * Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{a}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} k(x) dx.$$

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- [1] AGRESTI, A : On the extinction times of varying and random environment branching processes. J. Appl. Prob. 12, 39-46(1975)
- [2] ATHREYA, K. B. , NEY, P. E. : Branching processes. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1972
- [3] BELLMAN, R. , COOKE, K.L. : Differential-difference equations. New York : Academic Press 1963
- [4] BOHLER, W. J. : Slowly branching processes. Ann. Math. Statist. 38, 919-921(1967)
- [5] BOHLER, W. J. : Generations and degree of relationship in supercritical Markov branching processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 18, 141-152(1971)
- [6] BOHLER, W. J. : The distribution of generations and other aspects of the family structure of branching processes. Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. Vol. III, 463-480, Berkeley : University of California Press 1972
- [7] BOHLER, W. J. : On the family structure of populations. Adv. Appl. Prob. 6, 192-193(1974)
- [8] CRUMP, K. S. , MODE, C. J. : A general age-dependent branching process I. J. Math. Anal. Appl. 24, 494-508(1968)
- [9] CRUMP, K. S. , MODE, C. J. : A general age-dependent branching process II. J. Math. Anal. Appl. 25, 8-17(1969)

- [10] DWIGHT, H. B. : Tables of integrals and other mathematical data. New York : Macmillan 1957
- [11] DONEY, R. A. : A limit theorem for a class of supercritical branching processes. J. Appl. Prob. 9, 707-724(1972)
- [12] DURHAM, S. D. : Limit theorems for a general critical branching process. J. Appl. Prob. 8, 1-16(1971)
- [13] FELLER, W. : An introduction to probability theory and its applications Volume II, 2nd ed. . New York-London-Sydney-Toronto : Wiley 1971
- [14] FILDES, R. : An age dependent branching process with variable lifetime distributions. Adv. Appl. Prob. 4, 453-474(1971)
- [15] FILDES, R. : An age dependent branching process with variable lifetime distributions : The generation size. Adv. Appl. Prob. 6, 291-308(1974)
- [16] HARRIS, T. E. : The theory of branching processes. Berlin-Göttingen-Heidelberg : Springer 1963
- [17] JAGERS, P. : A general stochastic model for population development. Skand. Aktuarietidskr. 52, 84-103(1969)
- [18] JAGERS, P. : Galton-Watson processes in varying environments. J. Appl. Prob. 11, 174-178(1974)
- [19] JAGERS, P. : Branching processes with biological applications. London-New York-Sydney-Toronto : Wiley 1975

- [20] KEIDING, N. , NIELSEN, J.E. : Branching processes with varying and random geometric offspring distributions. J. Appl. Prob. 12, 135-141(1975)
- [21] KHARLAMOV, B.P. : On properties of branching processes with an arbitrary set of particle types. Theory Prob. Appl. 13, 84-98(1968)
- [22] KHARLAMOV, B. P. : On the generation numbers of particles in a branching process with overlapping generations. Theory Prob. Appl. 14, 44-50(1969)
- [23] KHARLAMOV, B. P. : The numbers of generations in a branching process with an arbitrary set of particle types. Theory Prob. Appl. 14, 432-449(1969)
- [24] LINDVALL, T. : Almost sure convergence of branching processes in varying and random environments. Ann. Prob. 2, 344-346(1974)
- [25] LOEVE, M. : Probability theory, 3rd ed. . Princeton : van Nostrand 1963
- [26] LUKACS, E. : Characteristic functions, 2nd ed. . London : Griffin 1970
- [27] MARTIN - Löf, A. : A limit theorem for the size of the nth generation of an age-dependent branching process. J. Math. Anal. Appl. 15, 273-279(1966)
- [28] MODE, C. J. : Multitype branching processes. New-York : Elsevier 1971

- [29] MODE, C. J. : Discrete time age-dependent branching processes in relation to stable population theory in demography. Math. Biosci. 19, 73-100(1974)
- [30] RYAN, T. A. Jr. : On age-dependent branching processes. Ph. D. Dissertation, Cornell University 1968 . S.a. Notices Amer. Math. Soc. 14, 854-855(1967)
- [31] SAMUELS, M. L. : Distribution of the branching-process population among generations. J. Appl. Prob. 8, 655-667(1971)
- [32] SAVAGE, I. R. , SHIMI, I. N. : A branching process without rebranching. Ann. Math. Statist. 40, 1850-1851(1969)
- [33] SEWASTJANOW, B. A. : Verzweigungsprozesse. München-Wien : Oldenbourg 1975
- [34] SMITH, W. L. : Asymptotic renewal theorems. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 64, 9-48(1954)
- [35] SMITH, W. L. : On some general renewal theorems for nonidentically distributed variables. Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. Vol. III, 467-514, Berkeley : University of California Press 1962
- [36] SMITH, W. L. : On the weak law of large numbers and the generalized elementary renewal theorem. Pacific J. Math. 22, 171-188(1967)
- [37] STRATTON, H. H. Jr. , TUCKER, H. G. : Limit distributions of a branching stochastic process. Ann. Math. Statist. 35, 557-565(1964)

Nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erschien in den *Annals of Probability* die folgende Veröffentlichung über generationsabhängige Verzweigungsprozesse :

FEARN, D. H. : Supercritical age dependent branching processes with generation dependence. *Ann. Prob.* 4 , 27-37(1976).

Fearn untersucht darin einen Bellman-Harris Prozess, bei welchem nur die Nachkommensverteilungen generationsabhängig sind.

Er betrachtet für diesen speziellen generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess $M_i(t) = E Z_i(t)$

in Theorem 3.1, falls $m_n > 1$ und $\prod_{j=0}^{n-1} m_j \sim n^{\rho} L(n)$, $\rho > 0$,

und in Theorem 3.2, falls $m_n > m > 1$ und $\prod_{j=0}^{n-1} (m_j/m) \sim n^{\rho} L(n)$, $\rho > 0$,

wenn wir unsere Bezeichnungsweise aus 6.2 benutzen.

Sein Ergebnis in Theorem 3.2 läßt sich etwas einfacher schreiben:

$$M_0(t) / (\exp(\alpha t) t^{\rho} L(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} (\hat{\mu}^{\rho+1} \alpha)^{-1} (1 - 1/m)$$

und kann unter etwas stärkeren Voraussetzungen aus unseren Resultaten in 5.2 und 6.2 gewonnen werden (vgl. S. 87). Dasselbe ist zu den zweiten Momenten in Theorem 4.1 für den Fall $m > 1$ zu bemerken.

Als Hauptergebnis erhält Fearn in Theorem 4.2 L_2 -Konvergenz von $Z_i(t)/E Z_i(t)$ gegen eine Grenzvariable W_i und in Theorem 4.3 $\text{Var } W_i > 0$, wenn mindestens in einer Generation die Nachkommensverteilung eine positive Varianz hat.

Fearn erhält seine Ergebnisse aus einer Erweiterung der Fellerschen Erneuerungstheorie, Feller [13], VI.6. und XI.1.-2., auf Erneuerungsfunktionen der Gestalt $H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n G^{*n}(t)$ und mit Hilfe Tauberscher Sätze aus Feller [13], XII.5. .

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt Verzweigungsprozesse, welche man als stochastische Modelle für Bevölkerungsentwicklungen ansehen kann, in denen das Verhalten der Individuen von Generation zu Generation auf eine bestimmte Weise variieren kann.

Wir untersuchen in Teil I die Populationsgröße $Z_i(t)$ eines allgemeinen altersabhängigen Verzweigungsprozesses mit generationsabhängigen Lebensdauer- und Reproduktionsverteilungen, der mit einem Urvater aus der i -ten Generation beginnt. Dieser Verzweigungsprozess bereichert auf der einen Seite den von Crump-Mode 1968 und 1969 und von Jagers 1969 und 1975 untersuchten Verzweigungsprozess um die Generationsabhängigkeit und verallgemeinert auf der anderen Seite den von Fildes 1971 betrachteten Bellman-Harris Prozess mit generationsabhängigen Lebensdauern. Regularität und Aussterbewahrscheinlichkeit der Population lassen sich in Analogie zum generationsunabhängigen Fall behandeln. Für die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen bzw. Momente der Populationsgröße $Z_i(t)$ erhalten wir Systeme von Integralgleichungen bzw. Erneuerungsgleichungen. Mit Hilfe der Erneuerungstheorie von W.L. Smith für Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen können wir im superkritischen Fall unter gewissen Voraussetzungen bei Konvergenz der Reproduktionsfunktionen Konvergenz im quadratischen Mittel für $Z_i(t) / E Z_i(t)$ für $t \rightarrow \infty$ zeigen. Konvergieren die Reproduktionsfunktionen langsam genug, verhält sich die Normierung $E Z_i(t)$ für $t \rightarrow \infty$ wie $\exp(\alpha t) t^{\gamma}$ mit $\gamma \gg 0$; α ist der Malthus-Parameter der Grenz-Reproduktionsfunktion. Für den generationsabhängigen Bellman-Harris Prozess

geben wir ein Beispiel an, bei welchem sich $\gamma > 0$ additiv aus der Variabilität der Nachkommensverteilung und der Variabilität der Lebensdauerverteilung zusammensetzt.

Für generationsabhängige Bellman-Harris Prozesse mit exponentiell verteilten Lebensdauern wird in Teil II das Aussterben der Populationsgenerationen untersucht. Asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ erhalten wir mit einer Taylor-Entwicklung der erzeugenden Funktion der Nachkommensverteilung aus den wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen der Populationsgenerationsgrößen $Z_j^{(k)}(t)$ die Verteilung des Aussterbezeitpunkts der k -ten Populationsgeneration, falls die mittlere Lebensdauer in der $i+k$ -ten Generation größer ist als die der vorangegangenen Generationen. In einer Populationsgeneration lebt dann "zuletzt im wesentlichen nur noch ein Individuum". Die generationsunabhängige Version dieses Verzweigungsprozesses ist ein Markovscher Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit, für welchen das "Zusammenspiel der Generationen" noch etwas genauer angegeben wird. Startet man schließlich die Population mit einer wachsenden Anzahl N von Urvätern, sind die Größen der Populationsgenerationen asymptotisch Poisson-verteilt und die Abnahmen dieses Zufallsprozesses sind asymptotisch unabhängig, wenn N und die Zeit t geeignet gekoppelt beide gegen ∞ gehen.

LEBENS LAUF

des	Lutz Edler
geboren am	
18. Februar 1945	in Ziegelbronn, Kreis Schwäbisch Hall als Sohn des Bürgermeisters Ludwig Edler und seiner Ehefrau Else, geborene Herrmann
Herbst 1951 bis	
Frühjahr 1955	Besuch der Volksschule in Lachweiler
Frühjahr 1955 bis	
Frühjahr 1964	Besuch des Gymnasiums bei St. Michael in Schwäbisch Hall; Abschluß mit der Reifeprüfung am 26. 2. 1964
Sommersemester 1964 bis	
Wintersemester 1970/71	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg im Breisgau; Abschluß mit der Diplomprüfung am 14. 12. 1970; Thema der Diplomarbeit: "Verallgemeinerung des Gesetzes vom iterierten Logarithmus auf Doppelfolgen von Zufallsvariablen"
Vom 1. 2. 1971 bis	
31. 9. 1971	Akademischer Tutor am Mathematischen Institut der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg im Breisgau
Vom 1. 10. 1971 bis	
31. 12. 1972	Verwalter einer wissenschaftlichen Assistenten- stelle am Institut für Angewandte Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz
Seit 1. 1. 1973	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

